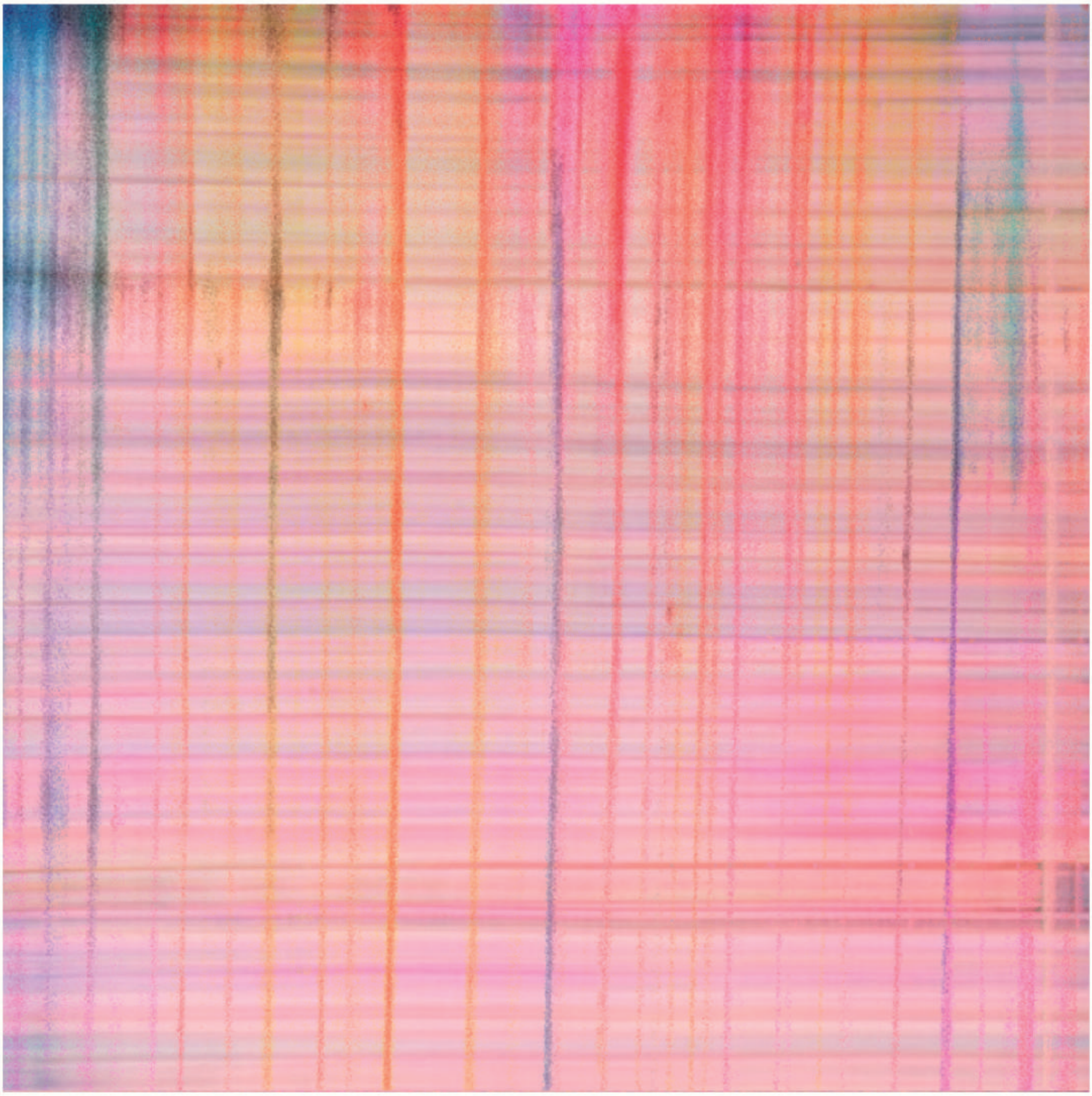
UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

67
HUMANIDADES



UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

EQUIPO EDITORIAL

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

TODA CORRESPONDENCIA DEBE DIRIGIRSE A (CORRESPONDENCE SHOULD BE ADDRESSED TO):
UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE, AVDA. SAN MIGUEL 3605, TALCA, CHILE.

REVISTAUCMAULE.UCM.CL

REVISTA@UCM.CL

REVISTAUCMAULE

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

UCMAULE
REVISTA ACADÉMICA
Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

UCMAULE
REVISTA ACADÉMICA
Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

PRESENTACIÓN

DRA. MARIANA LAZZARO-SALAZAR
Directora revista *UCMaule*, Universidad Católica del Maule, Chile

DRA. PAULA VERDUGO HERNÁNDEZ
Editora invitada, Universidad de Talca

DRA. ROMINA MENARES ESPINOZA
Editora invitada, Universidad de Valparaíso

Con un fuerte aporte a la educación, el número 67 de la revista *UCMaule* presenta una serie de trabajos que abordan, desde distintos puntos de vista, cualidades y desafíos, la enseñanza en Didáctica de la Matemática desde los Espacios de Trabajo Matemático, y de la historia a través del sentido formativo que le otorgan sus docentes. En ambos casos, se presentan cuestionamientos profundos sobre temas recientes y problemas que han atravesado el quehacer docente a lo largo de la historia. Este número nos invita a reflexionar sobre el rol de la inteligencia artificial en la didáctica de las matemáticas, las expectativas que profesores y estudiantes tienen acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la historia, el rol que cumple los conocimientos teóricos del profesor para el diseño y gestión de sus clases, la influencia de la historia en la enseñanza de la geometría, los paradigmas subyacentes a la matemática y a su epistemología y su impacto en el aprendizaje, y los beneficios del uso de soportes tecnológicos en la sala de clases para progresar a discusiones más complejas.

El número comienza con el ensayo titulado **“El nuevo trabajo matemático: un desafío en constante renovación para la educación matemática”**. El ensayo presenta un análisis crítico del papel de la tecnología y la inteligencia artificial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Examina la dinámica de interacción entre los seres humanos y los sistemas inteligentes, explorando su influencia en los procesos educativos y en la adquisición de conocimientos matemáticos. De esta manera, aborda aspectos cruciales como la responsabilidad mutua en la interfaz informática/didáctica, la evolución de las herramientas tecnológicas en la educación matemática y las teorías fundamentales que guían la comprensión del uso de artefactos digitales en este contexto.

El número continúa presentando el artículo **"Sobre la realidad del trabajo matemático realizado por alumnos y profesores"**, el cual se centra especialmente en la realidad del trabajo matemático realizado por alumnos y profesores. Para investigar esta cuestión, se desarrollaron sesiones de clase en un curso de formación continua de profesores. Estas sesiones se analizaron mediante el uso de la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). El uso combinado de estas dos teorías permitió desarrollar y realizar una codificación de las sesiones observadas. Con esta codificación, se pudo estudiar los ETM idóneos (potenciales y reales) que surgieron durante la formación. En particular, fue posible identificar diferentes patrones que permitieron reconocer y caracterizar distintas formas de contratos fuertemente didácticos. Las herramientas, y especialmente la codificación, desarrolladas para el estudio podrían utilizarse en futuras investigaciones sobre situaciones didácticas en relación con el ETM idóneo.

Luego, el trabajo titulado **"Relaciones teóricas en el ETM idóneo efectivo de profesores de Educación Secundaria"** estudia las relaciones teóricas del trabajo matemático en el aula de profesores de educación secundaria, con énfasis en la enseñanza de la geometría. A través de un enfoque mixto secuencial y con una muestra de 63 profesores, se analizan las relaciones entre componentes teóricas del ETM y el diseño de tareas por parte de profesores. Los resultados permiten mostrar interpretaciones sobre las relaciones entre componentes teóricas en el ETM de los profesores participantes con base en la evidencia empírica, las que pueden ser consideradas en investigaciones futuras para la valoración de los ETM del profesorado, el diseño de tareas, o bien para la investigación centrada en la enseñanza.

El siguiente artículo del número, titulado **"Semejanza de triángulos desde una perspectiva histórica a la luz del espacio de trabajo matemático en geometría"**, presenta una integración de la Historia de las Matemáticas dentro del marco del ETM en la geometría y la comprensión de los triángulos semejantes por parte de los estudiantes. La investigación considera 21 estudiantes de tercer grado de secundaria centrándose en la unidad de enseñanza "Triángulos Semejantes", para lo cual se utilizan siete hojas de trabajo que incorporaron fuentes y problemas de la Historia de las Matemáticas. Entre sus resultados, se observa mayor compromiso por parte de los estudiantes, se fomenta la actitud positiva hacia el plan de estudios, y se enriquece el trabajo personal de los estudiantes al brindar la oportunidad de desarrollar una dimensión reflexiva en la resolución de problemas.

El artículo llamado **“La comprensión de un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en base seis por parte de futuros profesores de primaria y su influencia en el ETM en base diez”** pone atención a los hallazgos de una experiencia con futuros profesores de primaria, en tercer año de licenciatura en Francia, proponiendo una secuencia de aprendizaje que permite construir un ETM para desarrollar el conocimiento de los números utilizando la base seis como sistema de representación, en paralelo del ETM en base diez. El estudio muestra un nuevo sistema de representación, la base seis, como un agente transformador del paradigma común tomando conciencia del papel no absoluto de la base diez.

La investigación titulada **“Introducir el concepto de función afín y lineal a partir de una tarea abierta en un entorno tecnológico”** pone foco en el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico (13 y 14 años) en relación con la función lineal y afín al enfrentarse a una tarea abierta en un entorno tecnológico. Los estudiantes deben trabajar con una tarea que puede resolverse de manera aritmética, para luego propiciar una discusión profesor-estudiantes con los resultados obtenidos, lo que permite la construcción de los conceptos de función lineal y afín, que se encontraban de manera implícita en la tarea inicial.

Finalmente, el número cierra con el estudio titulado **“Prácticas de enseñanza de la historia y su sentido formativo. Un estudio de caso en Ciudad de México”**. Desde un abordaje mixto, nos muestra de qué forma los docentes trascienden prácticas tradicionales para otorgar un sentido de formación que busca construir una conciencia histórica en el estudiantado que les permita verse como sujetos históricos con una actitud crítica ante la sociedad.

Con el compromiso de aportar al desarrollo del debate científico en las Humanidades que nos caracteriza, esperamos que este nuevo volumen de la *UCMaule* estimule la reflexión crítica sobre la praxis educativa no solo en educación matemática y de historia, sino que los aportes aquí expuestos también constituyan un avance en la reflexión educativa de otras áreas.

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 09-05-24 | Aceptado: 25-09-24 | Publicado: 20-12-2024

EL NUEVO TRABAJO MATEMÁTICO: UN DESAFÍO EN CONSTANTE RENOVACIÓN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UN DÉFI SANS CESSE RENOUVELÉ POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

THE NEW MATHEMATICAL WORK: AN EVER-RENEWING CHALLENGE FOR MATHEMATICS EDUCATION

PHILIPPE R. RICHARD
Université de Montréal
Montréal (Québec), Canadá
philippe.r.richard@umontreal.ca
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9124-9404

ENSAYO

Resumen

Este ensayo emprende un análisis crítico del papel de la tecnología y la inteligencia artificial (IA) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde la perspectiva de la inteligencia artificial, examina la dinámica de interacción entre los seres humanos y los sistemas inteligentes, explorando su influencia en los procesos educativos y en la adquisición de conocimientos matemáticos. Aborda aspectos cruciales como la responsabilidad mutua en la interfaz informática/didáctica, la evolución de las herramientas tecnológicas en la educación matemática y las teorías fundamentales que guían nuestra comprensión del uso de artefactos digitales en este contexto. Destaca ejemplos concretos de proyectos recientes para ilustrar las aplicaciones prácticas y los condicionantes que afectan al trabajo matemático. Con el objetivo de proporcionar una visión holística, explora cómo la tecnología no solo mejora la educación matemática, sino que también genera un nuevo tipo de trabajo matemático en términos de control, necesidad y obstáculos. Examina las implicaciones para el desarrollo del espacio de trabajo matemático, como sistema de actividad y como método de investigación en didáctica de las matemáticas.

Palabras clave: Pensamiento instrumentado, inteligencia artificial (IA), artefactos digitales, interacción humano-IA, didáctica de las matemáticas, nuevo trabajo matemático.

Résumé

Cet essai propose une analyse critique du rôle de la technologie et de l'intelligence artificielle (IA) dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Adoptant une perspective centrée sur l'intelligence artificielle, il examine la dynamique d'interaction entre les êtres humains et les systèmes intelligents, en explorant leur influence sur les processus éducatifs et sur l'acquisition des connaissances mathématiques. L'article aborde des aspects essentiels, tels que la responsabilité partagée à l'interface informatique/didactique, l'évolution des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que les théories fondamentales qui orientent notre compréhension de l'utilisation des artefacts numériques dans ce contexte. Il met en lumière des exemples concrets issus de projets récents afin d'illustrer les applications pratiques et les contraintes influençant le travail mathématique. Dans une perspective globale, notre texte explore comment la technologie ne se limite pas à améliorer l'enseignement des mathématiques, mais engendre également une nouvelle forme de travail mathématique en termes de contrôle, de besoins et d'obstacles. Il examine en outre les implications pour le développement de l'espace de travail mathématique, envisagé à la fois comme système d'activité et comme méthode de recherche en didactique des mathématiques.

Mots-clés : Pensée instrumentée, intelligence artificielle (IA), artéfacts numériques, interaction humain-IA, didactique des mathématiques, nouveau travail mathématique.

Abstract

This essay undertakes a critical analysis of the role of technology and artificial intelligence (AI) in the teaching and learning of mathematics. From the perspective of artificial intelligence, it examines the dynamics of interaction between humans and intelligent systems, exploring their influence on educational processes and the acquisition of mathematical knowledge. It addresses crucial aspects such as mutual responsibility for the informatics/didactic interface, the evolution of technological tools in mathematics education, and the fundamental theories that guide our understanding of the use of digital artefacts in this context. It highlights concrete examples of recent projects to illustrate the practical applications and constraints affecting mathematical work. Aiming to provide a holistic view, it explores how technology not only enhances mathematics education, but also generates a new kind of mathematical work in terms of control, necessity and obstacles. It examines the implications for the development of the mathematical working space, both as a system of activity and as a method of research in didactics of mathematics.

Keywords: Instrumented thinking, artificial intelligence (AI), digital artefacts, human-IA interaction, didactics of mathematics, new mathematical work.

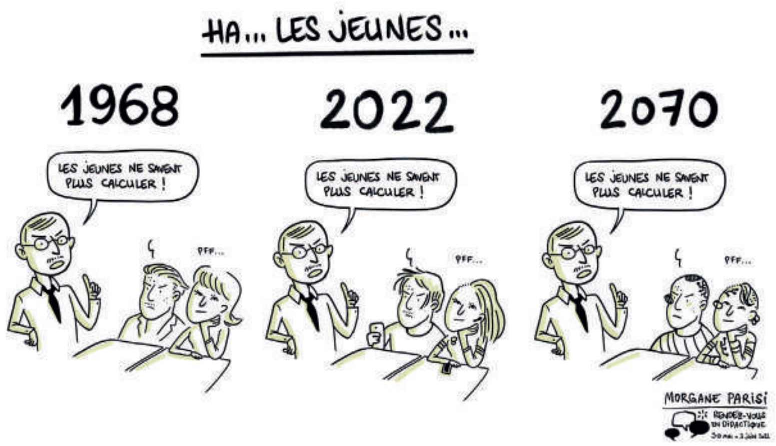
Les étudiants d'aujourd'hui ne savent plus calculer

Jean Dieudonné (1968)

1. Introducción

¿Cuántas veces hemos oído decir que los jóvenes ya no saben calcular? Nuestra cita de apertura procede del prefacio del famoso libro de Jean Dieudonné *Calcul infinitésimal*. En él, el matemático francés denunciaba las limitaciones computacionales de los estudiantes "de hoy" (figura 1), refiriéndose a las habilidades técnicas en el análisis matemático. Estamos en 1968: hablamos de dificultades para realizar un cambio de variables o una integración por partes, y no de problemas posteriores como los relacionados con el cálculo mental o el razonamiento matemático mediante un dispositivo tecnológico. Si no se imagina que unos años más tarde la calculadora electrónica de bolsillo aparecerá en las escuelas, en realidad no se soñará a menudo con la geometría interactiva, el cálculo simbólico o la visualización mediante las tecnologías que nos son tan familiares.

Figura 1. La invariabilidad del comentario a lo largo del tiempo puede resultar sorprendente, pero también suscita la preocupación de que los tratamientos discursivos o fuera de la lengua natural, como los métodos instrumentados o las representaciones visuales, formen parte esencial de la definición y comprensión de los objetos matemáticos.



Fuente: diseño de imagen por Morgane Parisi.

A menos que conozcamos el método de Abraham bar Hiyya Hanassi (c. 1070-1136) para calcular el área de un disco transformándolo gradualmente en un rectángulo (Castelnuovo, 1966; Freiman y Volkov, 2022), que seamos emuladores de Alexis Claude Clairaut (1713-1765) e invitemos al lector a imaginar el desplazamiento de elementos de figuras a partir de un texto (Barbin, 1991; Richard, Oller y Meavilla, 2016) o en pensar como Newton, Le Verrier o Kelvin, que se quejaban de las horas perdidas realizando cálculos elementales (Stoll, 2004). ¿Podíamos imaginar que un día estructuras algebraicas como las generadas por los polinomios permitirían controlar formas geométricas que se desplazan o apoyar la verificación de propiedades matemáticas aún por descubrir? Con todo, esto es lo que nos ofrece desde 2016 un software como GeoGebra, en el que los objetos geométricos se definen también simbólicamente, a caballo entre lo visual, lo formal y lo digital (Kovács, Recio, Richard y Vélez, 2017).

En otras palabras, la humanidad lleva mucho tiempo tratando de representar fenómenos como el movimiento, de visualizar conocimientos con los que se pueda razonar o de actuar sobre objetos matemáticos del mismo modo que con herramientas que sirven como medios de acción o instrumentos. De hecho, el trabajo matemático adopta muchas formas. Se expresa sin duda en la escritura, pero también en el pensamiento, en la plasmación del trabajo matemático, gracias a todo tipo de artefactos y sistemas de representación. En nuestro ensayo queremos, en la medida de lo posible, desentrañar preocupaciones con la tecnología y la IA partiendo del hecho de que se trata de un desafío en constante renovación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestras reflexiones se basan en nuestras contribuciones recientes y en la literatura científica relacionada con la informática, las matemáticas y la concepción y el uso de las tecnologías digitales (Bruillard y Richard, 2024). También, nos apoyamos en el estado de la cuestión y las cuestiones relativas a la inteligencia artificial (IA) y la didáctica de las matemáticas (Emprin y Richard, 2023; Lagrange, Richard, Vélez y Van Vaerenbergh, 2023), así como en ciertas cuestiones y desafíos relacionados con las pruebas instrumentales y el razonamiento instrumentado (Richard, Venant y Gagnon, 2019). Además, abordamos el trabajo matemático en la era digital, en particular en relación con la variedad de herramientas y el papel de las génesis (Flores-Salazar, Gaona y Richard, 2022), y más específicamente la génesis instrumental en la teoría de los espacios de trabajo matemático (Lagrange y Richard, 2022).

2. Interacción con el medio e inteligencia matemática

Cuando se trata de utilizar artefactos digitales o de aprender matemáticas, la noción de interacción con el medio parece inevitable. Aunque en el lenguaje cotidiano, medio es sinónimo de entorno, o incluso de algo que nos rodea, aquí prolongamos la noción de medio a partir del sentido técnico introducido por la Teoría de las Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSD). Según Brousseau (1998), el medio es el sistema antagónico del alumno, siendo este el protagonista del aprendizaje, que está implicado en la formación y aplicación de conceptos, procesos o actitudes matemáticas. El medio puede ser material, virtual, social o simbólico y, sobre todo, es portador de conocimientos matemáticos. Precisamente por ello, los conocimientos solo pueden revelarse cuando el alumno los cuestiona activamente con cierto grado de autonomía. No se trata, pues, de una contrapartida meramente reactiva, como en un modelo conductista o behaviorista, sino de un socio en la creación del sentido.

La inteligencia que surge de esta interacción no depende del medio, ni siquiera si es o incorpora un artefacto digital basado en IA. Tampoco depende del humano como individuo aislado, sino de la interacción del sistema sujeto-medio (o usuario-medio, alumno-medio, etc.), y es lo que define el nuevo trabajo matemático (Flores-Salazar, Gaona y Richard, 2022). En este contexto, conviene considerar la inteligencia en el sentido tradicionalmente anclado en la ecología, es decir, como la facultad de un individuo para desarrollarse en interacción con el medio. Así pues, la inteligencia es ante todo la capacidad de un individuo o de un sistema informático de adaptarse a situaciones nuevas, de comprender y resolver dificultades diversas, de dar sentido a los conocimientos transmitidos por el medio y de transformarlos. La inteligencia puede describirse como una facultad de adaptación, una forma de aprendizaje destinada a ajustarse al medio, o a la inversa, como una facultad de modelar el medio para satisfacer sus propias necesidades, creando así una mutualización de los recursos.

Esta concepción más amplia de la inteligencia abre nuevas perspectivas sobre la forma en que los individuos interactúan con su medio y se adaptan a él. De hecho, la noción de inteligencia aumentada en la interacción ya aparece en Douglas Engelbart (1962), famoso por sus trabajos sobre el desarrollo de la interfaz hombre-máquina. En cierto modo, este concepto preludia el aprendizaje instrumentado o el nuevo trabajo matemático, que se enriquece con el uso de una gran variedad de artefactos digitales. El aumento de inteligencia resultante sería característico de un sistema sujeto-medio emergente e interactivo, típico del que se encuentra en el TSD, donde es el sujeto quien toma la iniciativa de cuestionar un medio "artificial", socio en la construcción del conocimiento. Con la llegada del aprendizaje automático, las redes neuronales profundas y los modelos generativos, ahora es concebible que las máquinas puedan explotar esta forma de inteligencia aumentada para mejorar considerablemente su contribución al aprendizaje matemático humano. Para ello, es necesario introducir conceptos como nuevo trabajo matemático o idoneidad, y diferenciar el tipo de IA de que se trate.

3. El nuevo trabajo matemático

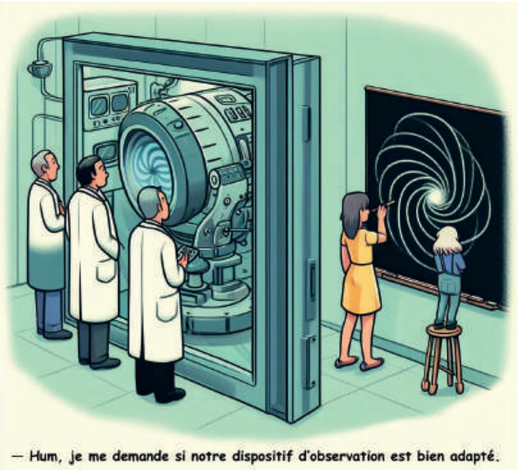
El significado del trabajo matemático cambia según lo que esté en juego en cada momento, pero sobre todo según el proyecto de la persona que lo lleva a cabo. Como concepto unificador, el trabajo matemático se sitúa en la intersección de los proyectos de enseñanza y aprendizaje. El trabajo matemático puede considerarse como la parte visible del pensamiento matemático, incluso cuando es la expresión de un pensamiento encarnado o de un pensamiento que se realiza esencialmente en la acción. Según la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (TETM, Kuzniak *et al.*, 2022), el trabajo matemático se construye progresivamente como un proceso de acercamiento entre los aspectos epistemológicos y cognitivos según tres desarrollos genéticos entrelazados, identificados en la teoría como génesis semiótica, instrumental y discursiva. Dado que los aspectos institucionales están vinculados a los aspectos epistemológicos, la noción de trabajo matemático estimula la vigilancia epistemológica en los proyectos de formación (enseñanza o aprendizaje).

Cuando nos centramos en el trabajo matemático en la era digital, la diversidad de herramientas tecnológicas utilizadas afecta a las génesis semiótica, instrumental y discursiva y a sus interacciones en lo que se puede denominar una danza de génesis. Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) nos recuerdan que el trabajo matemático siempre ha sido instrumentado, y definen el nuevo trabajo matemático reflexionando sobre la interacción entre humanos y máquinas para entender las nuevas formas de trabajo involucradas. Los autores sugieren algunas pistas interesantes para entender las formas que se están desarrollando en esta era digital y sus efectos (Artigue, 2022). Entre ellas, se discute la adaptación en el proceso iterativo y convergente de la idoneidad, ya sea entre el proyecto de enseñanza y el proyecto de aprendizaje, o entre la intención del diseñador y el trabajo realizado por el usuario.

4. El principio de idoneidad

El concepto de idoneidad, desarrollado por Ferdinand Gonseth dentro del idoneísmo, representa una metodología filosófica orientada originalmente a las ciencias exactas, pero que se ha ampliado pragmáticamente para incluir el estudio de diversos protocolos. Originalmente, la idoneidad se definía como lo que es apropiado para la ciencia real, implicando un ajuste constante entre los principios establecidos y la experiencia en curso.

Figura 2. El resultado de un proceso de idoneidad con el creador de imágenes de DALL-E 3 y de inteligencia aumentada con el texto añadido debajo



Fuente: publicado en Emprin y Richard (2023).

La idoneidad puede verse como un proceso dialéctico recursivo dirigido a la convergencia entre dos sistemas distintos. Estos sistemas pueden adoptar diferentes formas, como la realidad y el modelo en el contexto de un proceso de modelización, o la interacción entre un sujeto y un medio en el contexto de un proceso de conceptualización o utilización de un artefacto digital. En el primer caso, el modelo y la comprensión de la realidad se ajustan gradualmente entre sí, estableciéndose la convergencia cuando el problema se estabiliza. En el segundo caso, la convergencia se produce en cuanto la acción o el cuestionamiento del sujeto generan respuestas adecuadas del medio. Este enfoque dinámico de la idoneidad ofrece una perspectiva holística, haciendo hincapié en que el ajuste y la convergencia constantes entre los elementos en juego son esenciales para comprender mejor la interacción entre un ser humano y un artefacto que incorpora IA.

Al explorar la posibilidad de que la interacción entre dos sistemas constituya una entidad emergente, nos embarcamos en una búsqueda de la idoneidad. Un ejemplo de este enfoque puede verse en la generación de una caricatura con DALL-E 3, donde el sistema usuario (en este caso, los autores) somete varias peticiones sucesivas a la IA hasta obtener una imagen conforme a sus expectativas (figura 2). A continuación, al integrar una reflexión textual bajo la imagen, se explota el artefacto digital para enriquecer el proyecto. Esta asociación entre IA e iniciativa humana abre vastos horizontes, ampliando de forma natural las posibilidades que ofrecen los artefactos digitales actuales. Es una ilustración emblemática de un proceso idóneo, en el que el dibujo se convierte en un elemento autónomo que participa en la creatividad y el conocimiento, evolucionando retroactivamente en función de su adecuación a la realidad de la intención del creador.

El proceso dialéctico recursivo de la idoneidad se basa en varios elementos clave. Siguiendo el ejemplo de Gonseth (2022), es esencial abandonar el absolutismo de los fundamentos en favor de un enfoque relativo, permitiendo así que el marco de referencia se adapte. Esta relativización de las exigencias, aunque provisional, requiere una estrategia de compromiso por parte de los socios, en la que la eficacia se convierte en una exigencia en sí misma, que evoluciona con el progreso de los conocimientos involucrados. La intención dialéctica desempeña un papel crucial, sobre todo en la reasociación de lo teórico y lo empírico, de la intención y la realización, del trabajo del diseñador en un espacio-tiempo anterior al uso y de su trabajo después de considerar un uso efectivo, facilitando así el diálogo entre los sistemas. De este modo, el idoneísmo promueve una concepción dinámica del conocimiento, en la que todo significado está en devenir. El proceso idonéico, a través de la modelización, el trabajo instrumentado o el descubrimiento de invariantes, ilustra la capacidad de adaptación constante y la búsqueda de adecuación entre los elementos implicados. Cuando las máquinas pueden inferir tendencias a partir de grandes cantidades de datos, como ocurre con los modelos generativos, la idoneidad resulta esencial, porque es el ser humano quien puede reconocer el valor de las respuestas y aplicarlas en consecuencia, ya sea en el diseño o en el uso de un artefacto digital que implique IA y el nuevo trabajo matemático.

5. La instrumentación

La idoneidad solo es estable temporalmente y se cuestiona constantemente, en mayor o menor medida, a largo o corto plazo. En otras palabras, la estabilidad funcional del material obtenido, que sea tecnológico o didáctico, en la búsqueda del diseñador deja rápidamente obsoleto el resultado en cuanto se produce un cambio de cierta importancia, como la introducción de una nueva funcionalidad, el alcance de los límites del dominio de validez, la toma en consideración de nuevas expectativas o necesidades de los usuarios, o el deseo de mejorar las prestaciones o la flexibilidad del material. Por tanto, es necesario mejorar el material "idóneo" a lo largo del tiempo, ya sea para la producción de material pedagógico o para el diseño de artefactos digitales. Los usuarios rara vez tienen la oportunidad de expresar sus expectativas al diseñador. Esto es indudablemente menos cierto en el caso del material didáctico, especialmente cuando el profesor está presente en persona, diseña él mismo el material y puede negociar con el alumno. Al examinar la noción de idoneidad desde el punto de vista del diseñador, es interesante compararla con la de instrumentación en su dimensión de génesis instrumental para el usuario. La introducción de la noción de instrumentación, en particular por Vérillon y Rabardel (1995) en ergonomía cognitiva y psicología del trabajo, ha sido significativa. A pesar de ello, adquiere un significado didáctico particular en TETM:

> As for the instrumental genesis in the ThMWS, it is first an objective entity, linking tangible artifacts and observable processes of construction. Because it also comprises a conceptual dimension transforming both the user and the mathematical knowledge, it is compatible with Vérillon and Rabardel's idea of instrumental mediation. However, instrumental genesis in the theory of MWS is based on different choices compared to Vérillon and Rabardel's notion: on the one hand it is part of a theorization of mathematical work in educational settings not limited to the use of instruments, and on the other hand it does not theorize about the transformation occurring in the instrumental genesis. The two complementary viewpoints, psychological and institutional (one providing insight into the cognitive work, the other into how techniques are understood and implemented), derived from the works of Vérillon and Rabardel, and of Chevallard, can therefore help to "flesh out" an analysis of the instrumental genesis in a particular MWS, on the condition of being cautious not to merge or confuse ideas drawn from different theoretical perspectives (Lagrange y Richard, 2022, p. 226).

Si consideramos que las génesis semiótica, discursiva e instrumental se entrelazan y dan ritmo al trabajo matemático, entonces la TETM puede vincularse fácilmente a la IA como evolución de la TSD (Radford, 2017). Su importancia se hace patente cuando se diseña un dispositivo didáctico o informático haciendo hincapié en la interacción. Más concretamente, adoptando el modelo de Balacheff y Margolinas (2005) para analizar las concepciones de los alumnos (aquí, con referencia a sus conocimientos personales), se deduce que actuar sobre la interacción significa actuar directamente sobre las concepciones, y si pudiéramos actuar sobre el razonamiento, tanto en lo que se refiere a las operaciones como a su gobernanza, podríamos actuar sobre la adquisición de conocimientos válidos y su transformación. Para entender mejor las implicaciones de la instrumentación, también es esencial considerar la cuestión de los controles. Saber lo que uno hace con una máquina puede considerarse un ejemplo de control, ya que en la gestión del conocimiento o de procesos, el control implica una conciencia y comprensión de las acciones y decisiones. Esto incluye la conciencia de la acción, que significa estar consciente de las propias acciones y su impacto; la gestión de procesos, que permite ajustar y gestionar los procesos de manera más eficaz; y la autonomía, que posibilita tomar decisiones informadas y ajustar tareas basadas en una comprensión profunda. Así, el conocimiento y comprensión de las propias acciones constituyen una forma de control, permitiendo guiar y optimizar las acciones de manera reflexiva.

6. Control, necesidad y obstáculo instrumental

En el contexto de la colaboración hombre-máquina, algunas reacciones de las máquinas tienen el potencial de cambiar radicalmente el valor epistémico del conocimiento. Podríamos ofendernos por ello, como si fuera la máquina la que hace la mayor parte del trabajo, pero también debemos reconocer la instrumentación generada por las técnicas computacionales utilizadas como artefactos simbólicos. Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) proporcionan ejemplos de artefactos simbólicos que se remontan a la Edad Media, como la técnica de multiplicación *per gelosia* de Leonardo de Pisa (Fibonnacci). A pesar de los aspectos instrumentales en la interacción con el usuario, un artefacto tecnológico como una calculadora es también un artefacto simbólico como herramienta de procesamiento del conocimiento. Esto se debe a que, al facilitar el manejo y la comprensión de conceptos matemáticos, la calculadora actúa como tal al traducir y procesar la información matemática de manera semiótica, extendiendo el pensamiento y apoyando el aprendizaje. Asimismo, Richard, Venant y Gagnon (2019) introducen tres tipos de pruebas instrumentales, desde la Antigüedad, a partir de la coordinación de las génesis en el modelo de los espacios de trabajo matemático, o sea la prueba discursivo-gráfica, la prueba mecánica y la prueba algorítmica.

Otro ejemplo se refiere al uso de motores deductivos para comprobar la validez de una afirmación matemática (Hanna *et al.*, 2019). Los demostradores automáticos actuales son muy útiles para establecer la verdad de una afirmación (Quaresma, 2022), pero no revelan la lógica de la prueba utilizada por la máquina, ni producen pruebas que puedan ser leídas por humanos. Por otra parte, su eficacia misma actúa como un motor clave que potencia sus efectos, en particular por razones heurísticas o ideológicas. Ciertas herramientas de razonamiento automatizado, como las implementadas en GeoGebra (Kovács *et al.*, 2022), ayudan a formular conjeturas, descubrir nuevas propiedades, refinar y demostrar resultados geométricos basados en una construcción geométrica dinámica. Estas herramientas se basan en la IA simbólica. Desde el punto de vista de las máquinas, las técnicas utilizadas en la IA plantean una serie de interrogantes sobre el control y la validez del conocimiento "mediado" (López de Mántaras i Badia, 2023). Es decir, el conocimiento que ha sido filtrado, transformado o interpretado a través de un intermediario como la máquina, y que no es directamente accesible o entendible por los humanos, sino que ha pasado por técnicas y procesos de IA que pueden alterar la información de maneras específicas.

En todo caso, el mero hecho de utilizar un artefacto digital o una máquina matemática de cualquier tipo crea un efecto de caja negra en la medida en que el usuario ha delegado parte del procesamiento en la máquina. En consecuencia, en la interacción alumno-medio, parte del trabajo matemático es asumido por el medio. La génesis instrumental en la TETM se presenta ante todo como una entidad objetiva, estableciendo un vínculo entre artefactos tangibles y procesos de construcción observables. Al incorporar una dimensión conceptual (*cf.* modelo de Balacheff y Margolinas, 2005), transforma tanto al usuario como el conocimiento matemático, lo que la hace perfectamente compatible con el concepto de mediación instrumental que se encuentra en la literatura didáctica (Lagrange y Richard, 2022).

En la investigación sobre IA, se suelen identificar dos enfoques fundamentales (OCDE, 2019). Estos se agrupan bajo el *enfoque simbólico*, que conserva el vínculo causal, pero puede enfrentar problemas de tiempo de computación exponencial, especialmente con algoritmos de fuerza bruta, que resuelven un problema mediante la prueba exhaustiva de todas las posibles soluciones o combinaciones hasta encontrar la correcta. Por otro lado, el *enfoque estadístico* parece ofrecer una estrategia de resolución más eficiente cuando se enfrenta a grandes cantidades de datos, aunque introduce un nuevo nivel de opacidad en el proceso, en particular cuando se utiliza el aprendizaje automático profundo. A diferencia del enfoque simbólico, que puede esquematizarse más fácilmente para una mejor comprensión y permite entender completamente la lógica de decisión, el enfoque estadístico puede tener una complejidad interna que dificulta la comprensión detallada de su funcionamiento. Además, se basa a menudo en análisis de frecuencias durante sus fases de aprendizaje.

Los enfoques estadísticos, que incluyen el aprendizaje profundo y la IA generativa, se adaptan mal a las matemáticas. Los expertos en este tipo de IA reconocen que estas técnicas carecen de control. El problema no son cuestiones éticas o de seguridad, sino más bien la incertidumbre sobre la validez de las respuestas producidas. Además, la IA estadística carece de capacidad de razonamiento. Las matemáticas han pasado históricamente de los enfoques numéricos a los simbólicos. Solo la IA simbólica puede garantizar la preservación del valor de verdad. Si los enfoques estadísticos siguen siendo útiles para determinados aspectos del trabajo matemático, es necesariamente en complementariedad con la IA simbólica y, por supuesto, con la inteligencia humana. Actualmente se están explorando hibridaciones, o mejor dicho contrapuntos tecnológicos (Richard, 2024), que exploten cada enfoque, especialmente a través de iniciativas como el demostrador de teoremas AlphaGeometry (Trinh *et al*., 2024) o la integración de la base de conocimiento de WolframAlpha y las herramientas de computación de lenguaje natural con el prototipo de agente conversacional basado en predicción de texto ChatGPT (Wolfram, 2023).

El uso de enfoques estadísticos en el aprendizaje humano puede llevar a veces a una pérdida de control en la estructuración de los conocimientos. Los algoritmos de aprendizaje automático pueden ser complejos y opacos, lo que dificulta entender con precisión cómo se toman las decisiones. Además, en el caso de la IA generativa, en la que las máquinas pueden crear nuevos datos o contenidos, es posible observar distorsiones o resultados inesperados. Estos aspectos pueden requerir importantes recursos en términos de potencia de cálculo y procesamiento de datos, lo que efectivamente plantea interrogantes sobre su sostenibilidad a largo plazo, tanto desde el punto de vista medioambiental como económico. Por lo tanto, es esencial garantizar la fiabilidad de los resultados y determinar su ámbito de validez. En cuanto al conocimiento matemático, es importante preguntarse cómo se puede generar conocimientos no contradictorios. El estudio de estas cuestiones es ciertamente complejo, pero abordarlas requiere una colaboración constante entre la informática y la didáctica de las matemáticas (Emprin y Richard, 2023; Richard, 2024).

Todo esto, y mucho más, significa que en el aula de matemáticas tenemos que acostumbrarnos a pérdidas de control, pero esta pérdida tiene que ser comprendida, aceptada y tratada de alguna manera. Esto no es nada nuevo, pero no es solo el uso de artefactos digitales lo que crea efectos de caja negra. De hecho, son inherentes a todo conocimiento matemático y a su papel en el control de una situación de clase:

> Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale (Brousseau y Centeno, 1991, p. 176).

Tomemos el ejemplo del uso de los números reales en secundaria. Se utilizan sin haberlos definido formalmente, para resolver determinados problemas y llegar milagrosamente a la respuesta correcta. Parece, pues, que el trabajo matemático asociado al uso del cálculo puede llevarse a cabo sin necesidad de aclaraciones explícitas. Sin embargo, en situaciones en las que el uso de números reales es inevitable, es legítimo preguntarse qué principios los rigen en términos de exactitud, validez y autenticidad. Siguiendo el modelo propuesto por Balacheff y Margolinas (2005) en la interacción entre un sujeto y un medio, la necesidad de conocimiento surge de las operaciones internas que transforman los problemas y permiten construir una respuesta adecuada según las condiciones de la situación.

La cuestión más general del control obedece más bien a principios externos, como los invariantes estructurales o la lógica del razonamiento condicionado por la situación. En otras palabras, si hay lagunas en las concepciones de los alumnos, no es solo porque hayamos alcanzado los límites del dominio de validez de los conocimientos reales a través de los problemas que sabemos resolver. Es porque también tenemos que buscarlas en el sistema alumno-medio, porque es este último el que define el conocimiento a través del problema en juego, el cuestionamiento del sujeto, el procesamiento de la máquina, las expectativas sociales o los imperativos de la situación. Como en las situaciones en las que el problema ya está dado, frente a las situaciones de modelización en las que hay que construir la problematización. Parece pues indispensable integrar la noción de *obstáculo*, ampliamente estudiada en didáctica, bajo la forma de un obstáculo instrumental para dar cuenta del nuevo trabajo matemático que se despliega en la era digital.

7. Primer ejemplo de obstáculo instrumental

Siguiendo la estela de los trabajos seminales de Bachelard (1938) y Gonseth (2022), Duroux (1982) introduce la noción de obstáculo comparándola con la de dificultad. Propone una perspectiva según la cual los obstáculos no son simplemente circunstancias que exigen un gran esfuerzo o que se caracterizan por una carencia, sino que representan más bien conocimientos o concepciones. Brousseau (1989) propuso posteriormente la idea de que los errores recurrentes son construcciones derivadas de las concepciones de los alumnos, y no meros accidentes. Aunque estas concepciones sean erróneas, no carecen de valor, ya que pueden producir respuestas adecuadas en un contexto específico y, fuera de ese contexto, conducir a respuestas erróneas. Así pues, para obtener una respuesta correcta que abarque un campo de aplicación más amplio, es necesario adoptar un punto de vista muy diferente. Los obstáculos, de origen esencialmente cognitivo, pueden encontrar sus fuentes en factores ontogénicos, epistemológicos, didácticos o culturales, influyendo así en su evolución. Al proponer un obstáculo vinculado al medio, contemplamos los errores recurrentes y persistentes en la interacción con un artefacto digital como el resultado producido por concepciones y construido en torno a ellas. He aquí algunas ilustraciones de este tipo de obstáculo.

Cuando resolvemos un problema geométrico de forma tradicional, dibujamos una figura a partir de una descripción textual e interpretamos la figura coordinando el significado de los signos figurales con el de los signos discursivos. Pero si la figura la construye un tercero, la situación se vuelve más compleja. Cualquier representación figural existente oculta el orden en que se construyó la figura. Aunque un lector puede deducirlo parcialmente si tiene acceso al protocolo de construcción o si los elementos contextuales le parecen suficientemente claros, no siempre es capaz de hacerlo. Las representaciones figurales son también formas que se representan a sí mismas, y a veces es necesaria una descripción discursiva o un diálogo con el autor de la figura para entender qué es o qué se supone que representa. Este problema se encuentra de nuevo en la geometría interactiva, pero el estatus de la figura, representada o mediada por la máquina, y las posibles variaciones figurales generan un nuevo tipo de complejidad. En Flores-Salazar, Gaona y Richard (2022) se muestra que en un software como GeoGebra existen varias figuras: una *figura aparente* en el módulo de construcción geométrica que autoriza el desplazamiento, una *figura parametrizable* definida por la lógica de la construcción, una *figura numérica* sobre la que se pueden aclarar ciertas propiedades por muestreo, así como una *figura simbólica*, modelada por el álgebra, que puede dictaminar sobre la veracidad de las proposiciones utilizando técnicas de cálculo simbólico en una lógica modal.

El entrelazamiento de varias figuras confiere al objeto figural instrumentado todas las características de una figura que emerge del ideal tradicional. Así, debido al dinamismo inherente a las figuras instrumentadas, que abarca tanto la conservación de los vínculos figurales como la animación de los objetos, determinados enunciados matemáticos solo pueden observarse animando configuraciones (Coutat *et al.*, 2016). Además, algunas propiedades solo se revelan cuando se cumplen determinadas condiciones previstas por el usuario (Kovács *et al.*, 2022). Estos procesos implican un nuevo trabajo matemático en la interacción con el medio, y si surgiera un obstáculo, habría que abordarlo examinando también lo que dice el medio y lo que es posible decir con él. Consideraciones similares son abordadas también por Richard, Venant y Gagnon (2019) en relación con las pruebas instrumentales y el razonamiento instrumentado.

Este ejemplo de obstáculo instrumental no se refiere a la eficacia del artefacto digital, sino que caracteriza la naturaleza de la interacción cognitiva. Es evidente que cuando se realiza una nueva tarea matemática, surgen nuevas relaciones semiótico-instrumentales. Para identificar este tipo de obstáculos de forma convencional en didáctica de las matemáticas, sería necesario identificar los errores recurrentes y persistentes que se observan en la práctica actual. Desgraciadamente, dada la velocidad vertiginosa a la que se desarrollan y utilizan los artefactos digitales en las escuelas, esta tarea está resultando prácticamente imposible. Desde nuestro punto de vista, la búsqueda de la idoneidad en la realización del trabajo matemático es inevitable y representa un compromiso óptimo, ofreciendo una ventaja decisiva desde una perspectiva humana y objetiva de la interacción con los artefactos digitales. Se trata de un proceso evolutivo abierto y coherente con el progreso del conocimiento.

Esto sugiere que un obstáculo instrumental es una dificultad cognitiva que surge cuando la interacción con un artefacto digital altera o limita la comprensión del sujeto sobre el conocimiento en juego, afectando cómo aborda y resuelve problemas, plantea cuestiones o realiza un trabajo matemático.

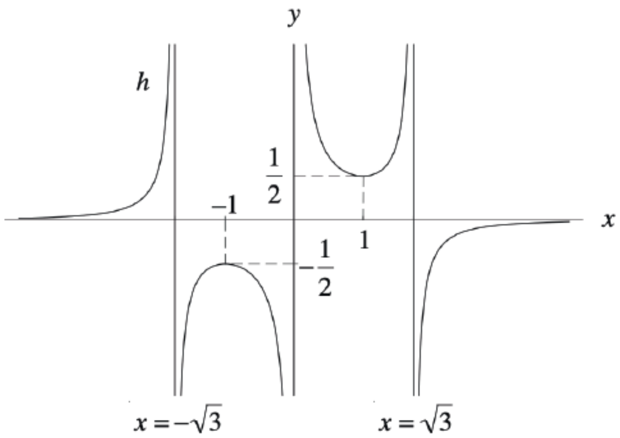
8. Segundo ejemplo de obstáculo instrumental

El segundo ejemplo procede de la inevitable tensión entre discretización y continuidad en la representación y el tratamiento de los objetos en el análisis. En el ejercicio titulado *Est-ce qui sait?* (juego de palabras en francés con "esquisser" que significa "esbozar"), concebida para alumnos de final de secundaria, nos interesa la función inversa de una función h de la que solo conocemos una representación gráfica (figura 3). La primera tarea consiste en esbozar un gráfico de $1/h$ e identificar una posible representación analítica (pregunta **a**), antes de asociarle un valor epistémico que se refiere a la fiabilidad, exactitud o validez de la respuesta encontrada (pregunta **b**). El ejercicio comienza en el entorno de papel y lápiz y, tras una primera respuesta a la pregunta **b**, se entabla una discusión con el formador sobre las representaciones de $1/h$ utilizando la interfaz de GeoGebra. La figura 4 es el resultado de esta discusión en el ámbito de la formación de docentes de matemáticas, y es esta la que sirve a nuestro propósito.

Figura 3. Enunciado para el 2° ejemplo de obstáculo instrumental

Exercice 10 *Est-ce qui sait?*

Voici la **représentation graphique** de h :



ç

a) Esquisser, à droite, la représentation graphique de $\frac{1}{h}$ puis proposer une représentation analytique de celle-ci sur son graphique.

b) La représentation analytique de $\frac{1}{h}$ que vous avez trouvée est-elle sûre ? Pourquoi ?

Fuente: elaboración propia.

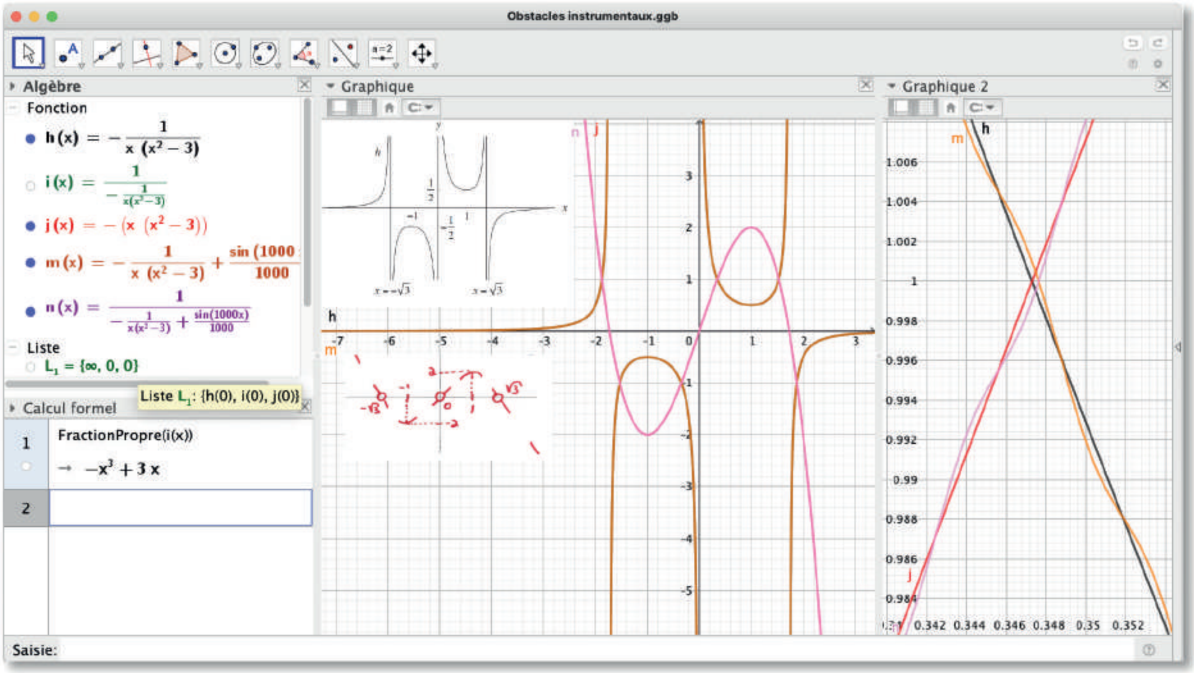
Tradicionalmente, al representar gráficamente este tipo de funciones se tienen en cuenta una serie de elementos, como los puntos de intersección con los ejes, los puntos críticos, las asíntotas, etc. A continuación, mediante signos estandarizados, se esboza localmente el comportamiento de la función para ilustrar y facilitar la comprensión conceptual del objeto. El objetivo de este esbozo no es alcanzar una precisión gráfica rigurosa, sino poner de relieve las principales características de la función. Sin embargo, es importante destacar que este esbozo es ante todo una representación semiótica en matemáticas, lo que implica que la representación tiene efectos productivos y reductores (Duval, 1995; Richard, 2004):

- Algunas propiedades no son visibles, mientras que otras sí lo son.
- Toda representación semiótica es cognitivamente parcial en relación con lo

que representa.

- Una representación semiótica dada puede constituir un obstáculo para un tratamiento profundo.

Figura 4. Resultado de la discusión entre lo visualizado y lo representado las funciones *h* y 1/*h*



Fuente: elaboración propia.

En la figura 4, proponemos una solución manuscrita en rojo, colocada en la ventana gráfica principal, justo debajo del gráfico de la función *h*. Se trata de una posible solución de 1/*h* para la pregunta **a**. Una representación analítica de 1/*h* aparece en la ventana de álgebra y es igual a $-x^{3+3x}$. Formalmente, las funciones *i*(*x*) y *j*(*x*) son equivalentes, porque *j* es la expresión de *i* como fracción propia, pero se distinguen analíticamente por su dominio de definición. Las funciones *m*(*x*) y *n*(*x*) son variaciones de las funciones *h*(*x*) e *i*(*x*) mediante la adición de una función sinusoidal de frecuencia 1 000 y amplitud 1 000-1 para engañar a la vista inicial. Esto significa que en la ventana gráfica centrada en el origen en un marco de referencia ortonormal estándar tienen el mismo aspecto. Sin embargo, al hacer *zoom* en un punto de intersección, se observa en la segunda ventana gráfica la oscilación de *m*(*x*) y *n*(*x*) alrededor de *h*(*x*) e *i*(*x*) (o *j*(*x*)) respectivamente, mientras que *h*(*x*) e *i*(*x*) parecen localmente rectas. La lista L_1 da el valor de las funciones *h*, *i* y *j* evaluadas en 0. La presencia de *h*(0) = ∞ en esta lista refleja una elección de los programadores de GeoGebra: el infinito es el inverso de cero.

En comparación con el entorno de papel y lápiz, la situación cambia radicalmente cuando *h* se presenta en un artefacto digital. En primer lugar, porque el software proporciona información global sobre la función, pero también porque la representación instrumentada no es continua en el sentido matemático del término. La ilusión de continuidad persistiría en el tiempo o en el espacio cuando el usuario desplace la curva, amplíe o reduzca la vista, ajuste las escalas del marco de referencia, todo ello limitado por la precisión de la pantalla, la definición interna de los objetos y los modelos elegidos por los programadores. Es la máquina la que gestiona la representación, la ilusión se mantiene en tiempo real, la potencia de la máquina es suficiente para mostrar la curva instantáneamente. Esta vez, para representar $1/h$, no podemos dejar espacios vacíos en torno a puntos significativos como máximos, raíces o comportamientos en el infinito, que ya no se destacan.

Si el enunciado del ejercicio 10 (figura 3) presentara una curva en la interfaz del software, se percibiría como un hecho concreto, una situación que podría manipularse, parametrizarse y cuestionarse. En el caso en el que se mostrara la curva de la función *m* en lugar de *h*, y en el que la definición analítica de *m* tampoco fuera accesible, sería necesario aprender más sobre la naturaleza de la curva explorándola en la interfaz antes de esbozar la inversa de *m*. En otras palabras, el control sobre las propiedades significadas es intrínseco a la interacción entre el sujeto y el medio, tanto desde el punto de vista semiótico (lector-revisor) como instrumental (usuario-diseñador). Además, es importante tener en cuenta que, por lo general, los usuarios desconocen los modelos subyacentes utilizados por la máquina. En consecuencia, su única opción es probar la representación propuesta, lo que puede distanciarles temporalmente de la intención original del problema al dar a entender falsamente que la representación en pantalla no es más que una versión tecnológica sofisticada pero transparente de una representación semiótica en papel. En otras palabras, los usuarios tienen que hacer un esfuerzo adicional para comprobar y verificar si el supuesto conocimiento se corresponde realmente con lo que se supone que representa, lo cual no es fácil cuando un estudiante está en plena devolución del problema en el sentido de TSD.

9. Conclusión

La revolución digital que hemos vivido desde el último cuarto del siglo XX sigue influyendo notablemente en la forma de aprender y utilizar las matemáticas. Hasta ahora, las matemáticas se han desarrollado esencialmente a través de la escritura y, en consecuencia, parece que siguen favoreciendo el discurso. Al mismo tiempo, los matemáticos que han sabido integrar las herramientas tecnológicas en sus investigaciones han empezado a utilizarlas en su trabajo y en la enseñanza, renovando la relación tradicional entre la escritura para hacer y aprender matemáticas. El resultado es una especie de tensión inevitable entre las matemáticas tradicionales y las matemáticas tecnológicas, cuyos contornos están mal definidos pero que, evidentemente, florecerán con el tiempo.

Al mismo tiempo, consta que los alumnos de hoy no tienen reparos en utilizar las nuevas tecnologías en su vida cotidiana, como tampoco los tienen en utilizarlas para realizar su trabajo de matemáticos. Es cierto que las escuelas promueven el uso de las nuevas tecnologías y a veces sugieren formas de utilizarlas, pero aparte de tener en cuenta consideraciones sociales, no pueden por sí solas reducir una tensión que les es ajena. Lo mismo ocurre con los docentes. Aunque siempre ha existido una oposición entre la pedagogía tradicional y la nueva, el profesor de matemáticas actual se enfrenta a una tensión epistemológica adicional. Esto se debe a la falta de un marco de referencia claro para las "matemáticas tecnológicas" (Cyr, Danguy-Pichette y Richard, 2023). Este desafío va más allá de la simple representación simbólica y su implementación mediante dispositivos informáticos. Como resultado, surge un campo de investigación aún en desarrollo, más complejo que los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985) y transposición informática (Balacheff, 1994). Aunque su impacto en el aprendizaje de las matemáticas es real, sigue siendo incierto a largo plazo.

El trabajo matemático con artefactos digitales sigue planteando cuestiones epistemológicas sin resolver. El problema para la escuela es que no puede inspirarse en lo que hacen los matemáticos. Se ve obligada a encontrar su propio camino y a lidiar con alumnos inmersos en la visualización y en herramientas de todo tipo. Pero las nuevas tecnologías se suelen desarrollar para la industria. El problema que se deriva de ello es, ante todo, el diseño de situaciones de aprendizaje basadas en las tecnologías existentes. Por lo general, se deja en manos de la inteligencia humana la adaptación a las nuevas situaciones, la comprensión y la resolución de las dificultades. Ahora bien, si buscamos una IA adaptada a la enseñanza de las matemáticas, se necesitan modelos de comprensión y razonamiento. Debe diseñarse incluyendo a los usuarios en el proceso de diseño en una fase muy temprana, y así evitar el sesgo de la IA generativa y su aprendizaje sobre datos culturalmente ajenos. Por lo tanto, debemos considerar la IA híbrida desarrollada en particular por expertos en nuestro campo.

10. Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2022). Note de lecture : Mathematical Work in Educational Context—The Mathematical Working Space Theory Perspective. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 27, 175-182.* https://doi.org/10.4000/adsc.1467

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Vrin.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(1-2), 9-42.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). La Pensée Sauvage.

Barbin, É. (1991). Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée. Repères, *IREM no 4*, 119-133.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques (pp. 41-63) et Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique (pp. 277-285). En *Construction des savoirs*. CIRADE.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2,3), 167-210.

Bruillard, É. y Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Thématique 2*, 173-208.

Castelnuovo, E. (1966). *La via della Matematica : La Geometria. Firenze La Nuova Italia.*

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage.

Coutat, S., Laborde, C. y Richard, P. R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 195-221. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9684-9

Cyr, S., Danguy-Pichette, É. y Richard, P. R. (2023). À la recherche d'un référentiel. En C. Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 117-129). IREM de Strasbourg. En ISBN : 978-2-911446-36-8

Duroux, A. (1982). *La Valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.*

Duval, D. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Emprin, F. y Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 28*, 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.3286

Engelbart, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A Conceptual Framework*. Summary Report, Stanford Research Institute, on Contract AF 49(638)-1024, October 1962, 134 pages. https://www.dougengelbart.org/pubs/augment-3906.html

Flores Salazar, J. V., Gaona, J. y Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. R. Richard (eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Freiman, V. y Volkov, A. (2022). Historical and Didactical Roots of Visual and Dynamic Mathematical Models: The Case of "Rearrangement Method" for Calculation of the Area of a Circle. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 365-398). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_16

Gonseth, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace (Rééd. en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955).* Association F. Gonseth.

Hanna, G., Reid, D. A. y de Villiers, M. (eds.). (2019). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (Mathematics Education in the Digital Era). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For? En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 23-44). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2

Kovács, Z., Recio, T., Richard, P. R. y Vélez, M. P. (2017). Geogebra automated reasoning tools: a tutorial with examples. In Aldon, G. Jana Trgalová (eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 13).* École Normale Supérieure de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. En Mathematics Education in the Digital Era (Vol. 18). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Lagrange, J.-B. y Richard, P. R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. R. Richard (eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 211-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9

Lagrange, J.-B., Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. En B. Pepin, G. Gueudet y J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1-31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_37-1

López de Mántaras i Badia, R. (2023). *100 coses que cal saber sobre intel·ligència artificial*. Cossetània.

OCDE. (2019). *L'intelligence artificielle dans la société*. Éditions OCDE. https://doi.org/10.1787/b7f8cd16-fr

Quaresma, P. (2022). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 3-22). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_1

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, *29*(4), 493-508. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0225-3

Richard, P. R. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Peter Lang.

Richard, P. R. (2024). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. En K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari y G. A. Morris (eds.), *Proceedings of the forty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Chapter 17: Plenary Papers, pp. 2213-2235). Kent State University. https://doi.org/10.51272/pmena.46.2024

Richard, P. R., Venant, F. y Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Richard, P. R., Oller, A. M. y Meavilla, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *48*(5), 843-859. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9

Stoll, C. (2004). The Curious History of the First Pocket Calculator. *Scientific American, 290(1),* 92-99. http://www.jstor.org/stable/26172659.

Trinh, T. H., Wu, Y., Le, Q. V. *et al.* (2024). Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, *625*, 476-482. https://doi.org/10.1038/s41586-023-06747-5

Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education, 10, 77-101.*

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 13-07-24 | Aceptado: 09-10-24 | Publicado: 20-12-2024

SOBRE LA REALIDAD DEL TRABAJO MATEMÁTICO REALIZADO POR ALUMNOS Y PROFESORES

ON THE REALITY OF MATHEMATICAL WORK UNDERTAKEN BY STUDENTS AND TEACHERS

ALAIN KUZNIAK
Université Paris Cité
París, Francia
alain.kuzniak@u-paris.fr
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8170-3530

ESTUDIOS

Resumen

Este trabajo se centra especialmente en la realidad del trabajo matemático realizado por alumnos y profesores. Para investigar esta cuestión, se desarrollaron sesiones de clase en un curso de formación continua de profesores. Estas sesiones se analizaron mediante el uso de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TDS) y la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ThETM). El uso combinado de estas dos teorías ha permitido desarrollar y realizar una codificación de las sesiones observadas. Con esta codificación, pudimos estudiar los ETM idóneos (potenciales y reales) que surgieron durante la formación.

En particular, es posible identificar diferentes patrones que permiten reconocer y caracterizar distintas formas de contratos fuertemente didácticos. Las herramientas, y especialmente la codificación, desarrolladas para el estudio podrían utilizarse en futuras investigaciones sobre situaciones didácticas en relación con el ETM idóneo.

Palabras claves: Devolución e institucionalización, situaciones didácticas, itinerarios y caminos, trabajo matemático y circulación del trabajo, contrato fuertemente didáctico.

Abstract

The present study focuses on the actual practice of mathematical work by students and teachers. In order to investigate this question, a series of classroom sessions were developed for use in a teacher training course. The sessions were subjected to analysis using the Theory of Didactic Situations (TDS) and the Theory of Mathematical Working Spaces (ThMWS). The combination of these two theories has enabled the development and implementation of a coding system for the observed sessions. The coding facilitated the examination of the *idoine* (potential and actual) MWSs that emerged during the training. In particular, it permitted the identification of distinct patterns, which enabled the recognition and characterization of different forms of strongly didactic contracts. The tools, and in particular the coding, developed for the study could be employed in future research on didactic situations in relation to the *idoine* ETM.

Keywords: Devolution and institutionalization, didactic situations, itineraries and paths, mathematical work and circulation of work, strongly didactic contract.

1. Introducción: Cómo las prácticas de los profesores y las respuestas de los alumnos se relacionan con el trabajo matemático

Una cuestión central de la didáctica de las matemáticas es la tensión entre la responsabilidad de los profesores de transmitir conocimientos en el aula y la expectativa de que los alumnos realicen un trabajo real orientado a la producción de un pensamiento matemático autónomo. La investigación sobre esta cuestión implica que se examinen los comportamientos y las prácticas de los profesores en relación con el proceso de aprendizaje de los alumnos. Entre los numerosos estudios y teorías en el campo de la educación matemática, algunos han abordado los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores y sus competencias. Una de las corrientes más influyentes se basa en el trabajo de Shulman (1986) que introdujo la noción de conocimiento pedagógico del contenido (PCK) para complementar el conocimiento del contenido matemático. A partir de esta idea, sucesivos desarrollos han contribuido a definir el corpus de conocimientos directamente relevantes para la enseñanza de las matemáticas (Hill *et al*., 2008). Otras teorías se centran en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos y descansan en hipótesis alternativas sobre cómo aprenden los estudiantes cuando abordan problemas por sí mismos o con el profesor. Entre las teorías en esta línea utilizadas actualmente en nuestro marco de investigación se encuentran la Teoría de la Objetivación (Radford, 2021), la Teoría de la Actividad en Didáctica de las Matemáticas (Vandebrouck, 2018) y la Abstracción en Contexto (Hershkowitz *et al*., 2001).

Una particularidad de las teorías desarrolladas inicialmente en Francia, por ejemplo, en las investigaciones realizadas por Brousseau o Chevallard, es la consideración que se da a los contenidos matemáticos en el ámbito de la didáctica. La epistemología de los contenidos matemáticos desempeña un papel importante en el avance de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje. Es en este contexto en el que surgió nuestra pregunta sobre la conexión entre las prácticas de los profesores y las producciones matemáticas de los alumnos. Más concretamente, en este trabajo pretendemos evaluar la realidad y la efectividad del trabajo matemático realizado en una sesión de matemáticas e introducimos un marco desarrollado específicamente para analizar las prácticas de los profesores con respecto al nivel de compromiso de los alumnos. Para ello, se aplican en combinación las teorías de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997a) y Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al*., 2016; Kuzniak *et al*., 2022). La primera, TSD, nos proporciona el concepto de contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997b) que ayuda a describir y caracterizar las interacciones profesor-alumno y su impacto en el trabajo matemático. La segunda, ThETM, explica el trabajo realizado y proporciona las herramientas analíticas para la evaluación de su realidad y eficacia.

En las secciones siguientes, exponemos los marcos teóricos de este estudio antes de presentar las herramientas utilizadas para identificar y describir los distintos tipos de contratos y abordar nuestra pregunta de investigación. Con estas herramientas, desarrollamos un sistema de codificación que aplicamos para analizar las sesiones observadas en nuestro estudio. Las sesiones de clase se diseñaron e implementaron como parte de un programa colaborativo de formación continua de profesores según el modelo Lesson Study, adaptado al contexto francés. A continuación, presentamos un análisis *a priori* de la situación didáctica asociada a una tarea de probabilidad (La liebre y la tortuga). Se describen y caracterizan las diferentes formas de contratos fuertemente didácticos identificadas. Por último, se presentan y discuten nuestros resultados y su posible uso en la formación de profesores y la investigación.

2. Marco teórico y metodología

2.1 Establecimiento del marco teórico

2.1.1 El contrato didáctico de Brousseau

El concepto de contrato didáctico fue introducido por Brousseau (1986) para dar cuenta de los compromisos recíprocos implícitos o explícitos que reúnen al profesor y a los alumnos en torno a un proyecto pedagógico y que son específicos del conocimiento que se va a enseñar.

El contrato didáctico tiene una relevancia internacional significativa, siendo útil para interpretar una serie de situaciones en el aula y, por lo tanto, diversas dificultades encontradas por los estudiantes y profesores (Sarrazy, 1995).

Brousseau (1997b) introdujo las estrategias fuertemente didácticas que relacionó con formas específicas de contratos didácticos, denominados "contratos fuertemente didácticos". Estas formas de contratos se asocian a las estrategias en las que la intención del profesor de enseñar matemáticas es claramente evidente. Esta definición puede parecer sorprendente dado que, *a priori*, un profesor de matemáticas tiene evidentemente la intención de enseñar matemáticas.

Para comprender mejor esta forma de contrato fuerte, puede ser útil contrastarla con otro tipo de contratos que introdujo Brousseau, los contratos débilmente didácticos: "En este caso, el profesor acepta organizar su mensaje en función de determinadas características de la persona a la que se dirige. El profesor asume cierta responsabilidad por el contenido del mensaje, pero ninguna por sus efectos en el receptor" (traducido de Brousseau, 1997b, p. 26).

El profesor solo se interesa entonces por el contenido matemático y su organización, sin preocuparse de cómo lo reciben los alumnos. Esto contrasta con el contrato fuertemente didáctico por el que el profesor se centra tanto en el contenido matemático como en la recepción de su mensaje.

Brousseau ha propuesto seis contratos fuertemente didácticos que ha descrito de forma más o menos explícita haciendo referencia a diferentes marcos teóricos (psicológicos, filosóficos, etc.): los contratos de imitación, de ostensión, de condicionamiento, el contrato constructivista, el contrato empirista y el contrato socrático (o mayéutico). El contrato de ostensión es el que tiene el nombre menos familiar e inteligible con un nombre que sugiere fuertemente la visualización, como se verá más adelante. Brousseau lo definió de la siguiente manera:

> El profesor "muestra" un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta "verlo" como representante de una clase de la que tendrá que reconocer los elementos en otras circunstancias.
>
> La comunicación del conocimiento, o más bien el reconocimiento, no implica hacerlo explícito. Simplemente se supone que este objeto es el elemento genérico de una clase que el alumno tiene que imaginar a través de la interacción de ciertas variables que a menudo están implícitas (traducido de Brousseau, 1997b, p. 50).

Aunque Brousseau no indica claramente los diferentes parámetros que le permiten caracterizar los contratos fuertemente didácticos, destaca sin embargo dos *fases de la enseñanza* que deben tenerse en cuenta al observar las situaciones de instrucción y el contrato didáctico (1997b, p. 40): la devolución y la institucionalización. "La devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepte las consecuencias de esta transferencia de responsabilidad" (Brousseau, 1997a, p. 230).

Esta fase suele observarse cuando los profesores asignan a sus alumnos una nueva tarea (o subtarea).

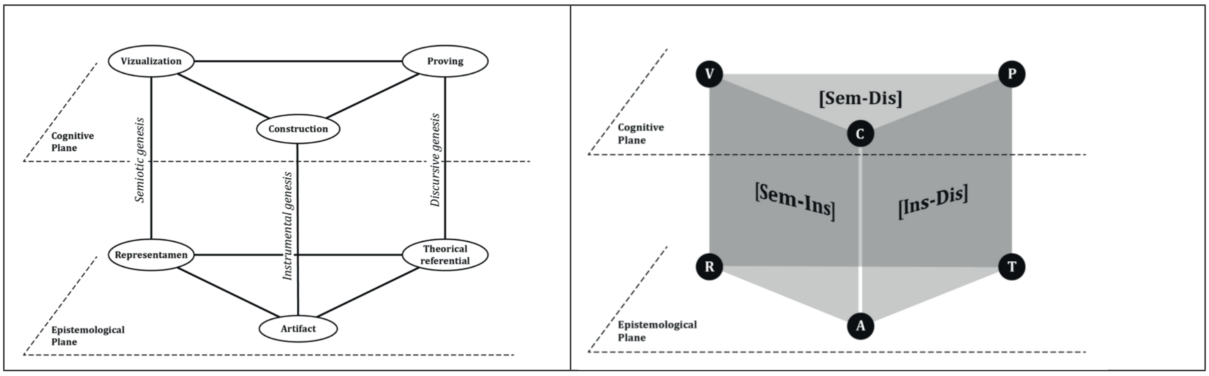
El constructo de institucionalización se introdujo para subrayar la responsabilidad de los profesores en el reconocimiento formal por parte de los alumnos del objeto de conocimiento implicado en el aprendizaje. Con la institucionalización, los alumnos deberían ser capaces de identificar el conocimiento que ahora deben conocer y dominar. En la visión socioconstructivista de Brousseau, la institucionalización sigue y concluye la búsqueda por parte de los alumnos de una solución a un problema.

Según este punto de vista, describir el papel y la naturaleza de la devolución y la institucionalización ayuda a identificar y caracterizar los contratos fuertemente didácticos. Llegados a este punto, estos contratos pueden parecer heurísticos y latentes, y aún tenemos que demostrar su operatividad. Este será uno de los objetivos del presente estudio.

2.1.2 Espacios de Trabajo Matemático

La Teoría de los ETM (ThETM) se centra especialmente en cuestiones relacionadas con la descripción, caracterización y formación del trabajo matemático con el fin de determinar lo que realmente se enseña y se aprende en matemáticas. En un dominio matemático dado, las facetas epistemológica y cognitiva de las matemáticas se consideran a través de la articulación de dos planos en un Espacio de Trabajo Matemático (figura 1, izquierda). El plano epistemológico se refiere principalmente al contenido matemático, mientras que el plano cognitivo da cuenta de las acciones de los alumnos individuales mientras resuelven problemas.

Figura 1. El diagrama ETM



Fuente: Kuzniak *et al*., 2016, p. 725.

En el plano epistemológico se construyen tres componentes que interactúan: un conjunto de signos concretos y tangibles (R); un conjunto de artefactos (A); y un marco teórico de referencia (T). Centrado en las actividades cognitivas de los sujetos, otros tres componentes componen el plano cognitivo: la visualización (V) vinculada al desciframiento e interpretación de signos; la construcción (C), que depende del uso de artefactos materiales o simbólicos con técnicas asociadas a ellos; y la prueba (P) apoyada en un discurso racional y deductivo que proporciona validaciones estructuradas en torno a un marco de referencia teórico (T) o "referencial teórico".

La dinámica activada entre los planos epistemológico y cognitivo se observa a través de tres génesis distintas: una génesis instrumental (Ins) relacionada con el uso de artefactos; una génesis discursiva (Dis) relacionada con la parte teórica del trabajo; y una génesis semiótica (Sem) que expresa la importancia de los signos en el trabajo matemático. Se considera que el desarrollo del trabajo matemático se produce a través de interacciones congruentes de estas génesis en los planos verticales del diagrama (figura 1, derecha).

El diagrama ETM con sus tres planos verticales permite representar y visualizar la evolución y la dinámica entre las génesis durante la realización de una tarea o de un conjunto de tareas por los individuos. Esta dinámica se denomina circulación del trabajo (Kuzniak *et al*., 2022, p. 66).

Para profundizar el estudio en el trabajo matemático, se distinguen tres ETM: de referencia, personal e idóneo.

El *ETM de referencia* es el que definen las personas u organizaciones responsables de la institución educativa. Uno de los elementos esenciales de este ETM es el referencial teórico.

El *ETM personal* refleja la realidad del trabajo realizado por determinados estudiantes que deciden abordar y completar una tarea de resolución de problemas.

El último, el *ETM idóneo*, es específico de la clase en cuestión.

> *Se refiere a ese estado intermedio de transmisión y mediación del conocimiento en el que existe tensión entre las expectativas del profesor y la redefinición de las tareas y el problema para que progrese el trabajo personal de los alumnos* (Kuzniak, 2022, p. 18).

En la ThETM, la expectativa de que surja un contrato fuertemente didáctico es parte del estudio del trabajo matemático real que resulta de la situación de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, el estudio de la circulación del trabajo en el ETM idóneo puede contribuir a calibrar el grado de compromiso y eficacia de profesores y alumnos en la producción de trabajo matemático real. La consideración del ETM *idóneo* es fundamental para este estudio.

2.1.3 Algunos criterios para identificar los contratos fuertemente didácticos

La noción de contratos didácticos se utiliza en diversos estudios a distintos niveles y a través de entrevistas cualitativas, pero también en procesos de evaluación a gran escala. Sin embargo, pocos la han considerado específicamente en términos del grado débil o fuerte del contenido matemático durante la implementación de una tarea por parte del profesor. A este respecto, Perrin-Glorian y Hersant (2003) introdujeron cuatro componentes para describir y comprender mejor el contrato didáctico.

> *Los dos primeros están relacionados con el conocimiento en cuestión: el dominio matemático, el estatus didáctico del conocimiento. El tercer componente trata de la naturaleza y las características de la situación didáctica en curso, el último, trata del reparto de responsabilidades vinculadas al conocimiento entre el profesor y los alumnos* (traducido de Perrin-Glorian y Hersant, 2003, p. 238).

Cada uno de estos componentes fue analizado en detalle por los autores, que observaron una falta de estabilidad y regularidad en los microcontratos que identificaron. Además, sugirieron que sería interesante analizar a un nivel más amplio para identificar los contratos más recurrentes.

A partir de esta conclusión, optamos por estudiar la circulación global del trabajo matemático identificando los planos del ETM idóneo que los alumnos y el profesor eligen utilizar durante la sesión. También observamos las responsabilidades respectivas asumidas por el profesor y los alumnos a lo largo del trabajo matemático. La activación (o no) de uno o varios planos verticales muestra la naturaleza real del trabajo matemático y, por tanto, proporciona información sobre la naturaleza del contrato didáctico.

Este planteamiento debería permitirnos responder, en particular, a las siguientes preguntas. ¿Se basa realmente este contrato en las matemáticas, se ajusta a las expectativas de referencia? ¿Son correctos los resultados según criterios puramente matemáticos?

2.1.4 Cuestión de investigación

Ahora podemos formular nuestra pregunta de investigación en los marcos teóricos que sirven de referencia para el estudio: TSD y ThETM.

> *¿Cómo identificar y caracterizar los contratos fuertemente didácticos en relación con el trabajo matemático que surgen cuando los profesores asignan una tarea en el aula?*

Como se ha mencionado anteriormente, el estudio de los contratos didácticos en relación con el ETM *idóneo* debe basarse en la observación y el análisis de las sesiones de clase. A efectos de nuestro estudio, se consideran dos estados del ETM idóneo: un estado potencial, que corresponde a lo previsto por el profesor, y un estado efectivo, que muestra el trabajo realmente realizado en el aula. El *ETM idóneo potencial* es diseñado por los profesores para sus alumnos y desarrollado antes de la puesta en práctica de la situación didáctica en el aula. Proporcionará información sobre el contrato didáctico correspondiente a lo que el profesor desea conseguir. Por el contrario, el *ETM idóneo efectivo* resulta de la práctica y proporciona información sobre el contrato didáctico que ha surgido realmente. En este estudio, subrayamos la correspondencia o el desfase entre estos dos tipos de contrato.

2.2 Fuentes de datos e instrumentos de análisis

En esta sección, describimos en primer lugar las fuentes de datos utilizadas para el estudio (2.2.1), luego presentamos la *codificación* que nos ofrece una visión global de las *trayectorias* o *caminos* observados durante las sesiones (2.2.2). A continuación, resumimos los tres puntos principales en los que se centra este estudio (2.2.3). En la sección 3 se ofrece un análisis *a priori* de la tarea y de su puesta en práctica en el aula.

2.2.1 Fuentes de datos

El estudio se basa en un conjunto de datos recogidos durante un curso de formación de profesores sobre probabilidad matemática. La formación global del profesorado se estructuró en tres bucles en los que participaron distintas personas y distintos modos de aplicación.

- El bucle 1 tuvo lugar antes de la formación y en él solo participaron una profesora experimentada, Lucie (35 años), y uno de los investigadores (Masselin). Lucie aplicó la tarea de la liebre y la tortuga en su clase de 9° curso antes de participar en la formación como formadora. En el bucle 2 se utiliza una grabación de vídeo de su clase.
- Bucle 2: esta parte central se inspira en el modelo Lesson Study, adaptado al contexto francés (Masselin *et al*., 2020). Los profesores, divididos en dos grupos diferentes, tuvieron que diseñar colectivamente una situación instructiva, basada en la misma tarea, que luego fue implementada en dos aulas por un profesor de cada grupo y observada por el resto del grupo. Emma (33 años)

es la participante del grupo 1 que implementó la situación en un aula[1] .

- El bucle 3 tiene lugar después de la formación y se espera que los profesores asignen la tarea en sus aulas, como hizo Christian (42 años, participante del grupo 2).

Por lo tanto, en este artículo nos centramos en los contratos didácticos y en el ETM idóneo de los que informan tres de los profesores, Lucie, Emma y Christian. Se recogieron los siguientes datos de cada participante: la preparación de Lucie y una entrevista, una filmación de su sesión de clase y las grabaciones de audio de sus alumnos trabajando; la preparación colectiva de Emma realizada durante el curso de formación, la observación de los profesores escrita durante su sesión de clase y las producciones de los alumnos; la preparación de la clase de Christian y los datos de aplicación obtenidos mediante entrevista.

2.2.2 Itinerarios, caminos y códigos

Para la descripción de los diferentes ETM idóneo potenciales y efectivos de los profesores, introducimos una distinción entre itinerario (ruta planificada) y camino (ruta real). El primero proporciona información sobre las posibles elecciones realizadas por los profesores y planificadas antes de la sesión en su ETM idóneo potencial. A continuación, estos itinerarios se compararon con los caminos observados en el ETM idóneo efectivo. El ETM idóneo efectivo da cuenta del progreso del trabajo especificando las intervenciones del profesor y las interacciones con los grupos de estudiantes cuando resuelven juntos la tarea "La liebre y la tortuga". Para ello, presentamos diagramas que representan la dinámica y el trabajo de circulación de cada grupo de estudiantes en su ETM idóneo efectivo (Masselin, 2019). En particular, estos diagramas ponen de relieve lo que ocurre cuando el profesor interactúa con un grupo. Destacan la dinámica temporal de los intercambios entre el profesor y los grupos de estudiantes. Así, derivamos una visión global de la dinámica del aula utilizando cronogramas (apéndice 1) que ofrecen una línea temporal de las interacciones del profesor con cada grupo de alumnos (Masselin, 2020).

Los itinerarios (rutas planificadas) y los caminos (rutas reales) se representan mediante gráficos direccionales y de colores. Los gráficos deben leerse de derecha a izquierda, y los acontecimientos se suceden según la cronología que hayamos

1 Agustín, encargado de la puesta en práctica para el grupo 2, no siguió el plan previo y común de la sesión y adoptó un contrato poco didáctico al ignorar las reacciones de los alumnos (Masselin, 2020).

podido identificar durante la sesión de clase o en los preparativos de la sesión. Las flechas reflejan las interacciones entre profesores y alumnos y los vértices coloreados reflejan las distintas elecciones realizadas en función de las dimensiones de génesis o planos verticales implicados. Los símbolos utilizados para describir los itinerarios y caminos se enumeran a continuación y se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. Código utilizado para los itinerarios y los gráficos de trayectorias.

Profesor	D	Devolución	I	Institucionalización	$\cancel{I}$	Institutionalizar pero no sobre el contenido
Alumno	A	Acción	R	Resultado	F	Formulation Comunicación
Plano ETM Activado		[Sem-Ins]		[Ins-Dis]		[Sem-Dis]
Dimensión privilegiada		Semiotica		Instrumental		Discursiva

Fuente: elaboración propia.

Las intervenciones específicas del profesor se representan en un disco: (D) que designa la devolución, (I) la institucionalización y (I barrado) la institucionalización no relacionada con las cuestiones probabilísticas de la situación. Todos los factores que dependen de los alumnos se representan con un rombo. Su trabajo se marca con una (A) si se trata de una acción, y esta acción puede producir resultados (R).

El profesor puede pedir a los alumnos que formulen y comuniquen (F). El objetivo es que expliquen tanto sus resultados, si los hay, como los procedimientos que emplearon para obtenerlos. La fase de institucionalización permite al profesor explicar los conocimientos que se esperan de los alumnos al final de la sesión. Los planos del ETM activados ([Sem-Ins], [Ins-Dis] o [Sem-Dis]) se identifican mediante tres colores distintos: verde, rojo y azul. Estos colores representan así el trabajo matemático desarrollado a lo largo de la sesión.

A partir del análisis de la codificación, podemos identificar ciertos patrones y detectar su repetición a lo largo de la sesión. Esta repetición —cíclica o lineal— da ritmo al trabajo, apoya el contrato didáctico y ayuda a describirlo. De acuerdo con la noción de ritmo de Lefebvre (1992), la repetición no excluye las diferencias y variaciones. Podemos identificar variaciones según el código de colores y la organización de cada patrón.

2.2.3 Focos de atención

En nuestro estudio y análisis de las sesiones, prestamos especial atención a los siguientes puntos en relación con la descripción del ETM idóneo:

1. Devolución e institucionalización para obtener información sobre las responsabilidades del profesor a lo largo del trabajo realizado.
2. Circulación del trabajo que realizan los alumnos mediante la identificación de los planos (o semiplanos) que favorecieron durante su trabajo. También utilizamos el contraste entre las fases de las acciones de los alumnos (sin intervención del profesor) y las fases de las formulaciones de sus resultados por parte de los alumnos (ya sean formulaciones privadas o presentadas al profesor).
3. La realidad y corrección del trabajo matemático realizado. Este punto nos permite distinguir entre contratos débil y fuertemente didácticos. Este documento se centra en los contratos fuertemente didácticos.

3. La tarea y la situación didáctica

3.1 La tarea de la liebre y la tortuga

La tarea "La liebre y la tortuga" utilizada para este estudio es emblemática del trabajo matemático que se espera en Francia en las lecciones sobre probabilidad matemática de los planes de estudios de 9° curso. Se desarrolla en los libros de texto franceses utilizados por los profesores, además de estar ampliamente implementada en las aulas de todo el país. En la sesión de formación de profesores estudiada para esta investigación (Masselin, 2019; Henríquez *et al*., 2022), se utilizó el siguiente enunciado:

> *La liebre y la tortuga*
> Se celebra una carrera entre la liebre y la tortuga, con un dado de 6 caras bien equilibrado en un hipódromo cuadrado.
> Esta carrera se desarrolla del siguiente modo:

- En cada ronda de la carrera se lanza el dado:
  - Si el dado cae en 6, la liebre llega directamente a la meta.
  - De lo contrario, la tortuga avanza una casilla.

- Gana el primero que llegue a la última casilla.
    - Se completan tantas rondas como sea necesario hasta que haya un ganador.

¿Quién tiene más posibilidades de ganar, la tortuga o la liebre?

El número de casillas disponibles en la carrera es una variable didáctica importante del problema. Lucie ha elegido un enunciado con seis casillas.

Los valores de probabilidad dependen del número de casillas de la carrera y son los más cercanos cuando el número de casillas es 4 (tabla 2). En este caso, es necesario apoyar la simulación en numerosas vueltas para asegurarse experimentalmente de que se observa la diferencia entre ambos valores.

Tabla 2. Variación de los valores de probabilidad en función del número de casillas disponibles para una carrera.

Number of squares for the race	P(Tortoise) Exact value	P(Tortoise) Approximate value	P(Hare) Exact value	P(Hare) Approximate value
3	$\frac{125}{216}$	0.579	$\frac{91}{216}$	0.421
4	$\frac{625}{1296}$	0.482	$\frac{671}{1296}$	0.518
5	$\frac{3125}{7776}$	0.402	$\frac{4651}{7776}$	0.598
6	$\frac{15625}{46656}$	0.335	$\frac{31031}{46656}$	0.665

Fuente: elaboración propia.

Según el plan de estudios oficial francés, debe realizarse una simulación del experimento aleatorio para obtener un primer valor de la posible solución. Dos modelos probabilísticos pueden realizar la simulación. El primero es congruente al nivel semántico con la situación, pero es difícil de programarlo. Puede representarse mediante un árbol que describe fielmente la evolución del juego. A un nivel matemático más avanzado, puede identificarse mediante una ley geométrica truncada.

En el segundo enfoque, basado en la ley binomio y no congruente con la situación, se realizan seis lanzamientos consecutivos de los dados antes de decidir si ha ganado la tortuga o la liebre. La liebre gana cuando hay al menos un 6 en la serie de lanzamientos.

3.1.2 La situación pedagógica asociada a la tarea: un estudio *a priori*

El itinerario completo establecido en el plan de estudios oficial se describe y resume en la tabla 3. Antes de completar la tarea, los alumnos han aprendido a calcular probabilidades sencillas de sucesos equiprobables. También han utilizado ya una hoja de cálculo para simular el lanzamiento de un dado.

Tres fases principales, con subfases, pueden considerarse elementos constitutivos de la situación instructiva asociada a la tarea.

Tabla 3. Las diferentes fases del ETM de referencia

Expl.: Exploración y explicación de la situación aleatoria	*Expl. 1: Descubrimiento del problema* *Expl. 2: Aclaración de las reglas del juego* *Expl. 3: Aclaración del experimento aleatorio*
Sim.: La simulación	*Sim. 1: Justificación del uso de la simulación* *Sim. 2: Simulación real* *Sim. 3: Conclusión de la simulación*
Prueb.: Desarrollo de una prueba	*Prueb. 1: Prueba experimental* *Prueb. 2: Prueba sin simulación* *Prueb. 3: Institucionalización de la prueba*

Fuente: elaboración propia.

En cada una de estas fases, el trabajo matemático esperado es diferente y se puede caracterizar utilizando los planos verticales del ETM (sección 2.1.2.).

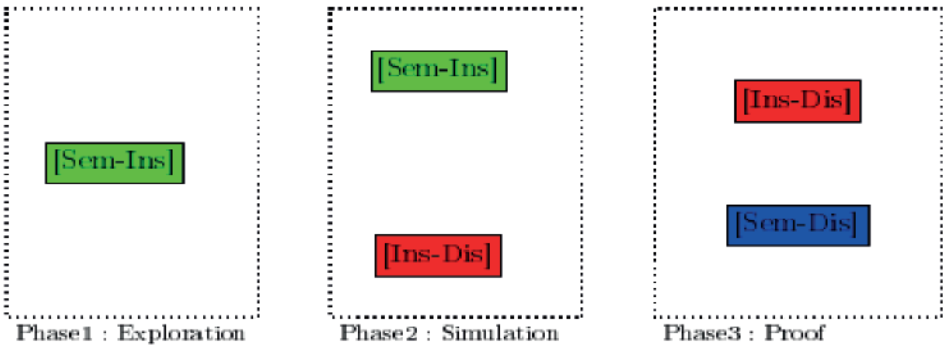
1. El objetivo de la primera fase (Exploración) es que los alumnos descubran la situación aleatoria y se aseguren de que han comprendido las reglas del juego. Para ello, se pide a los alumnos que jueguen algunas partidas. El trabajo matemático implica esencialmente signos, definiciones y reglas, así como artefactos materiales relacionados con el juego. Se sitúa en el plano [Sem-Ins], codificado en rojo.
2. La simulación propuesta en la segunda fase no es necesaria para responder a la pregunta, pero se pide explícitamente en el ETM de referencia. En consecuencia, el trabajo matemático se orienta hacia un trabajo experimental en el que la probabilidad, la estadística y los algoritmos pueden movilizarse en mayor o menor medida en función de las opciones elegidas por el profesor. La simulación es un

punto delicado. El trabajo de los alumnos se situará en el plano [Ins-Dis] si el modelo en el que se basa la simulación es identificado e implementado por los alumnos. Si, por el contrario, el profesor identifica el modelo y programa la simulación, el trabajo de los alumnos se situará en el plano [Sem-Ins].

3. La tercera fase consiste en producir la prueba del trabajo y hay dos caminos posibles. En la primera, Prueb.1, la prueba es experimental y se basa en los resultados de la simulación ([Sem-Ins]). La segunda, Prueb.2, es una prueba deductiva basada en un modelo probabilístico sin ningún uso de la simulación. Esta prueba se sitúa en el plano [Sem-Dis], codificado en azul.
4. Esta fase es la de la institucionalización final.

En resumen, la circulación prevista del trabajo matemático entre los distintos planos del ETM de referencia puede esquematizarse mediante el siguiente diagrama:

Figura 2. Los diferentes planos del ETM de referencia



Fuente: elaboración propia.

Los profesores tienen un grado significativo de libertad para diseñar el posible ETM^{i} idóneo que pondrán en práctica en sus aulas. La figura 2 sirve tanto para identificar los itinerarios planificados por los profesores como los caminos recorridos por ellos y sus alumnos en el efectivo ETM^{i} idóneo efectivo. Esto nos ayudará a aclarar el desfase entre lo planificado y lo realmente implementado. Además, los enunciados de las tareas difieren de un profesor a otro, como se ha observado en nuestro estudio. Los puntos que pueden variar son, por ejemplo, el número de casillas para una carrera (seis en la declaración de Lucie, cuatro en la de Emma y cinco en la de Christian), los artefactos disponibles (dados, ordenador, etc.), el modelo probabilístico y el software para la simulación (hoja de cálculo, Scratch o ambos).

4. Descripción y caracterización de algunos contratos fuertemente didácticos

En esta sección, presentamos los diferentes contratos fuertemente didácticos puestos de relieve por nuestro estudio. En la subsección 4.1, la comparación de los itinerarios previstos en el potencial y los caminos realizados en el ETM idóneo efectivo muestra una divergencia real entre los dos contratos observados en la sesión de Lucie. En cambio, los dos contratos observados en la sesión de Emma están próximos y pueden considerarse similares. A continuación, en la sección 4.2, nos centramos en la institucionalización concluyente que completa la resolución de la tarea.

4.1 Entre el contrato potencial constructivo y el contrato efectivo constructivo *monitorizado*: la sesión de Lucie

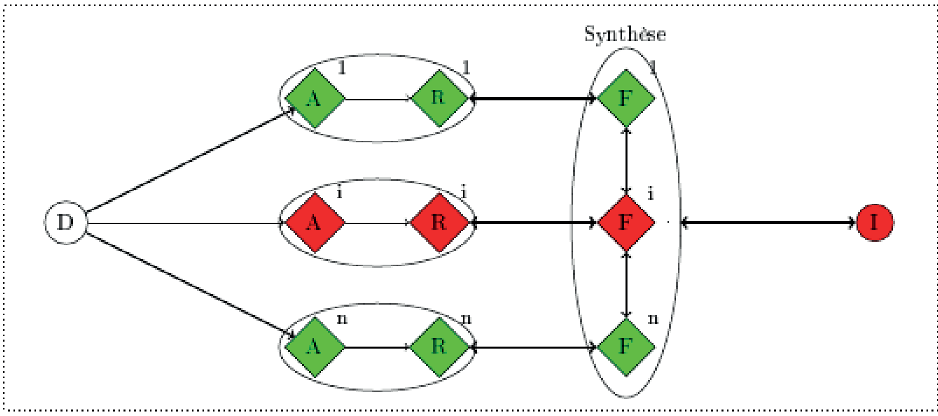
4.1.1 Un contrato potencial constructivo

A partir del análisis de la preparación de las clases de Lucie, derivamos la siguiente codificación de los itinerarios previstos en el ETM idóneo potencial, como se explica a continuación.

Para su devolución de la tarea, Lucie planeó proporcionar el enunciado de la tarea (3,1,1) a grupos de alumnos, e iniciar su actividad diciendo simplemente: *Os dejaré resolver el problema*. El disco blanco alrededor de la D indica la intención de Lucie de no orientar el trabajo hacia una forma específica de trabajo: la devolución es muy abierta. Pero, para orientar después el trabajo de los alumnos, tiene previsto decirles que pueden utilizar los dados que tiene en su mesa (Expl. In [Sem-Ins]), y también les dará la oportunidad de utilizar ordenadores (Sim.). Prevé dos tipos de trabajo: uno basado en la repetición del juego y otro en el uso de un modelo probabilístico (implícitamente binomial).

Según Lucie, los alumnos, trabajando en pequeños grupos, deben empezar a actuar (A) y producir resultados (R). A continuación, a partir de la formulación y discusión de sus diferentes resultados, pretende proponer una síntesis colectiva. Los objetivos (conocimientos y procesos) del trabajo realizado se institucionalizarán y validarán mediante una prueba de tipo experimental (Pro.1), con una explicación del modelo utilizado para la simulación [Ins-Dis].

Figura 3. Itinerarios (rutas planificadas) en el ETM idóneo potencial en la sesión de Lucie



Fuente: elaboración propia.

El contrato didáctico que se desarrolla promueve la emergencia del conocimiento a partir del trabajo de los alumnos. Llamamos a este contrato un contrato didáctico constructivo, relacionado con un enfoque socioconstructivista del aprendizaje por el que los estudiantes encuentran los resultados por sí mismos a través de una tarea bien elegida.

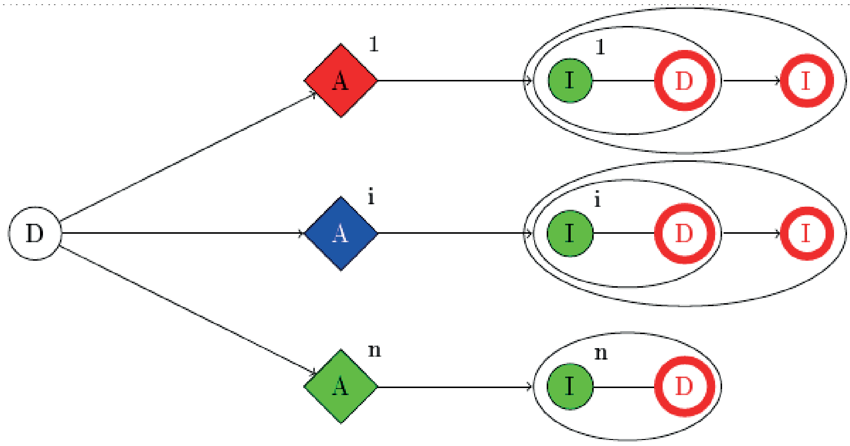
También observamos que Lucie pretendía fomentar el trabajo matemático de los alumnos en el plano [Ins-Dis], aunque pensaba que la mayoría de los grupos optaría por el plano [Sem-Ins]. En ambos casos, la dimensión instrumental es central, las variaciones residen en el papel del modelo probabilístico (figura 3).

4.1.2 Un contrato constructivo efectivo monitorizado

Gracias al cronograma, pudimos observar con detalle el desarrollo de la sesión y las interacciones entre el profesor y los distintos grupos de alumnos. Se observó una gran diversidad de acciones de los alumnos, que no todas se ajustaban a las expectativas del profesor.

Tras la devolución, cuatro grupos (2, 3, 5 y 7) tiraron los dados, jugaron a varios juegos y trabajaron en el plano [Sem-Ins]. Dos grupos (6 y 8) intentaron utilizar una simulación de hoja de cálculo, como había previsto el profesor. Pero los dos grupos restantes (1 y 4) optaron por utilizar árboles y empezar a calcular la probabilidad sin ninguna simulación. Su trabajo condujo a una prueba discursiva mediante árboles, que se sitúa principalmente en el plano [Sem-Dis]. Esta variedad dio lugar a tres ramas representadas por una fase de acción situada en los tres planos del ETM después de la primera devolución. Esto dio a la profesora la oportunidad de hacer que sus alumnos se involucraran en todos los planos del ETM para la fase de síntesis. Sin embargo, no eligió esta opción (figura 4).

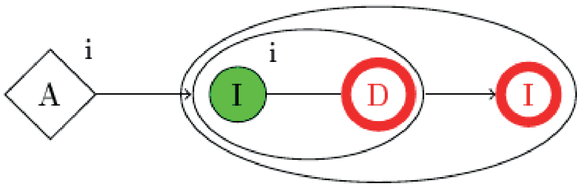
Figura 4. Trayectorias seguidas en el ETM idóneo efectivo: sesión didáctica de Lucie



Fuente: elaboración propia.

A partir del cronograma de la sesión, observamos la repetición del mismo patrón (figura 5).

Figura 5. Interacciones entre los grupos y la profesora (Lucie)



Fuente: elaboración propia.

Una visión más cercana del grupo 6 muestra que la profesora gestionó y redujo la variedad del trabajo de sus alumnos. Este grupo quería simular una carrera inicial y establecer un primer lanzamiento en la hoja de cálculo. Su trabajo se inició en el plano [Sem-Ins] utilizando el modelo geométrico truncado implícito. Entonces, los alumnos se encontraron con un obstáculo porque no sabían cómo programar una prueba en función del resultado del primer lanzamiento (6 o no 6) [Ins-Dis]. El profesor intervino y les pidió que abandonaran este método y realizaran sistemáticamente seis lanzamientos por carrera en la hoja de cálculo. Su devolución se guiaba por la ley binomial, pero solo dio a los alumnos una tarea técnica. No entendieron por qué, porque esta modelización no era coherente con la situación (3.1.1). La nueva y local devolución de Lucie está representada por una D roja rodeada por un círculo rojo, para subrayar el hecho de que el trabajo de los alumnos estaba orientado a la dimensión instrumental.

Lo mismo ocurrió con otros grupos que utilizaron otros métodos. En particular, en el grupo 4, los alumnos calcularon los valores de probabilidad utilizando árboles y sin simulación y trabajaron en el plano [Sem-Dis]. Pero la profesora les paró y les pidió que simularan la situación en la hoja de cálculo utilizando el mismo método que había indicado al grupo 6.

Examinando el cronograma de la sesión, podemos seguir la repetición de este patrón y observar cómo el profesor controlaba la propagación de la simulación basada en el mismo modelo. Las diferentes trayectorias del ETM idóneo efectivo fueron homogéneas a lo largo de la puesta en práctica de la situación en los diferentes grupos. Consideramos que solo se activa un semiplano [Ins]-(Ref), porque no hay construcción de razonamiento discursivo: el método se da sin justificación y se privilegia la dimensión instrumental. No hubo institucionalización conclusiva al final de la sesión.

Llamamos a este contrato didáctico *contrato didáctico monitorizado*. El método a seguir es impuesto sistemáticamente por el profesor y no por la retroalimentación del *medio* como en el enfoque de Brousseau. El contrato efectivo es diferente del contrato potencial.

4.2 Contratos socráticos (o mayéuticos) multilineales: la sesión de Emma

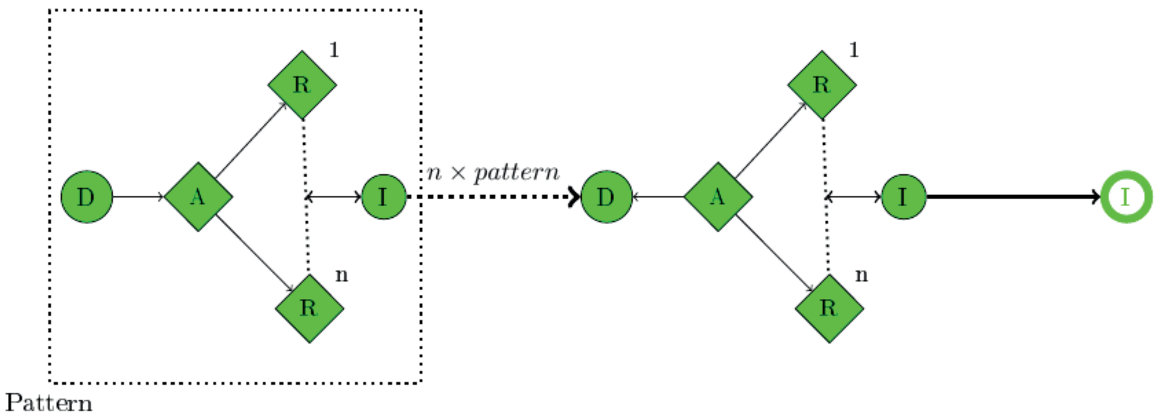
En la sesión de Emma, identificamos los contratos didácticos potenciales y eficaces. Esto se basa en una repetición de patrones en los que se dan subtareas precisas y limitadas a los alumnos.

4.2.1 Un contrato potencial socrático multilineal

Emma preparó su sesión con otros profesores durante el acto de formación del profesorado. Se planificó una primera fase de exploración (Expl.): cada grupo de alumnos debe lanzar un dado de espuma cinco veces. Emma quería asegurarse de que todos los alumnos entendían las reglas del juego (Expl.2). Su trabajo se sitúa en el plano [Sem-Ins]. La primera fase debía motivar la simulación (Sim. 1) y, a continuación, se entregó a los alumnos un archivo de simulación (Sim. 2). Después de utilizar el fichero de simulación, los grupos tenían que completar una tabla con los resultados de cada juego y calcular las frecuencias correspondientes. Por último, se pidió a los grupos de alumnos que dibujaran los puntos (n, f_n) en una hoja de papel en la que ya se habían proporcionado la escala y el eje.

Las distintas fases del ETM idóneo potencial se organizaron en una sucesión de patrones similares. Estos patrones se componían de una devolución inicial (1) y una fase de acciones de los alumnos que conducían a diversos resultados (2). Una institucionalización local (3) se daba sobre un punto preciso (la regla del juego, los resultados de los cinco lanzamientos impuestos para cada grupo, etc.) y permitía a todos los alumnos avanzar en su trabajo casi simultáneamente. A esta institucionalización local siguió una nueva devolución que relanzó el trabajo y dio ritmo a la sesión. En la sesión de Emma, el plano verde [Sem-Ins] fue siempre el preferido por los alumnos en su trabajo[2].

Figura 6. Rutas planificadas y caminos tomados en los ETM idóneo, Emma



Fuente: elaboración propia.

Esta sucesión de tareas bien guiadas con expectativas de conocimiento se asocia a un contrato didáctico socrático (el Meno de Platón). Como los alumnos emprendieron acciones diferentes y produjeron resultados distintos, calificamos el contrato de multilineal (o multidireccional).

2 Un examen más detallado del trabajo real puede llevar a marcar con una cruz el símbolo R o A cuando los alumnos son bloqueados y no obtienen el resultado.

4.2.2 ETM idóneo efectivo de Emma

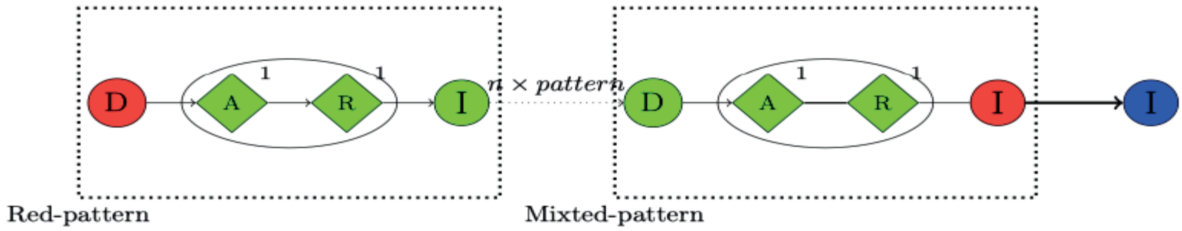
Durante la sesión, Emma siguió lo que había planeado hacer. Por lo tanto, el gráfico de trayectorias se aproxima al gráfico de itinerarios, pero nuestra observación proporciona información sobre las interacciones entre los alumnos y el profesor. En cada patrón, los alumnos trabajan en grupos y tienen subtareas que realizar (jugar a cinco juegos, completar una tabla, crear un gráfico). El profesor proporciona una herramienta de simulación lista para usar que se ejecuta en Scratch y no, como estaba previsto, en diferentes dispositivos.

Tres de los cinco episodios identificados (episodios 1, 3 y 4, apéndice 2) siguen un patrón idéntico al del contrato potencial: una devolución y, a continuación, una fase de acción que potencia varios resultados (en función del grupo de alumnos). En función de los resultados, el profesor proporciona una breve institucionalización local. Se dan nuevas subtareas hasta que se formula la institucionalización final. Los dos episodios son diferentes y están relacionados con los contratos de institucionalización (sección 4.3): local en el episodio 2 (5 minutos) y concluyente en el episodio 5. En conclusión, el contrato global es la combinación de un contrato socrático y de contratos específicos en relación con la institucionalización.

La sesión fue observada por todos los profesores que participaron en la formación. Recomendaron añadir subtareas, lamentando que los alumnos fueran meros ejecutores lanzando el software. Después del segundo episodio, sugirieron que los alumnos descubrieran y discutieran el archivo Scratch. También se modificó la devolución del episodio 4 para ayudar a los alumnos a definir y calcular frecuencias por sí mismos. Como resultado de estas adiciones, la codificación por colores de los diferentes patrones cambió y modificó el trabajo matemático, aunque su ritmo siguió siendo el mismo. El trabajo matemático no se situó exclusivamente en el plano [Sem-Ins], sino que se trasladó a [Sem-Dis] (discusión del guion y el modelo, investigación de la definición de frecuencias) o [Ins-Dis] (descripción de una carrera con Scratch y métodos de cálculo de frecuencias).

Para complementar el caso de Emma, nos referimos brevemente a la sesión de Christian, que muestra una versión simplificada del contrato socrático. Tras asistir al acto de formación, Christian dedicó tres sesiones de 55 minutos a la tarea con sus alumnos. El contrato didáctico de Christian era similar al de Emma, pero lo llamamos contrato socrático *lineal* porque no propuso varios caminos a los alumnos, como hizo Emma. En su contrato, los alumnos actuaban siempre en el plano [Sem-Ins] mientras que el profesor realizaba el trabajo en los otros planos.

Figura 7. Trayectorias recorridas en el ETM idóneo efectivo, Christian



Fuente: elaboración propia.

4.3 Los contratos específicos y evolutivos de la institucionalización final

La institucionalización final trata de un contenido específico y suele cerrar una sesión (o una serie de sesiones) sobre un tema o problema matemático determinado. La imparte el profesor a toda la clase y no solo a un alumno o grupo de alumnos.

En su estudio sobre las fases de institucionalización en las aulas ordinarias, Hersant y Perrin-Glorian (2005) describen cómo los profesores introducen una forma de diálogo con los alumnos, denominada DIS (discusión interactiva de síntesis). Los profesores utilizan las respuestas de los alumnos para mostrarles los errores que hayan podido cometer y recordarles los conocimientos previos. Además, guían a los alumnos hacia la solución mediante una forma de contrato similar al contrato socrático, con una mayor frecuencia de preguntas de los profesores y respuestas muy breves de los alumnos. En nuestro estudio, encontramos este mismo fenómeno que identificamos con nuestras herramientas. En particular, observamos la codificación por colores del trabajo, así como la participación de los alumnos en su desarrollo.

4.3.1 Evolución hacia un contrato socrático basado en la visualización: la institucionalización final de Emma

Emma comparó primero los valores obtenidos por los distintos grupos de alumnos para 2.000 carreras. Utilizó el término “aleatoriedad” para destacar la diversidad de los resultados. A continuación, proyectó el gráfico de un grupo que obtuvo una frecuencia de 0,52 de que ganara la liebre (el valor esperado). A continuación, Emma abrió un archivo Scratch preparado que presentaba simulaciones de 15 y 1.000 carreras. Concluyó la sesión dibujando una línea recta hacia la que parecen converger los datos resultantes, y escribió: “Cuanto más simulamos el experimento, más se acercan las frecuencias observadas a un valor: la probabilidad", y añadió que esto se ajusta a la "Ley de los grandes números".

Emma estableció una síntesis de discusión interactiva y mostró a los alumnos lo que debían saber y reproducir, pero sin darles definiciones precisas ni pruebas formales. Las interacciones se situaron en el plano [Sem-Ins] y Emma insistió en utilizar la visualización y los signos, favoreciendo la dimensión semiótica que da su código de color semiótico al trabajo. El contrato se aproxima al contrato de ostensión de Brousseau (Brousseau, 1997; Salin, 1999).

4.3.2 Evolución hacia un contrato socrático basado en un enfoque lectivo: la institucionalización concluyente de Christian

El estilo de Christian es muy común, y lo hemos observado en otras situaciones de instrucción. Concluyó su sesión proporcionando una prueba formal a sus alumnos, sin referirse a la simulación anterior. Explicó que la tortuga gana si, y solo si, seis lanzamientos consecutivos del dado son diferentes de 6, de ahí que el valor de la probabilidad sea $\left(\frac{5}{6}\right)^6$. Proporcionó un atajo para la fase de simulación (Sim.), que puede obtenerse directamente después de la fase de exploración (Expl.). Christian desarrolló pruebas formales basadas en el referencial. El trabajo matemático del profesor se situaba exclusivamente en el plano [Sem-Dis] y favorecía la dimensión discursiva. Aquí, se supone que los alumnos son oyentes atentos y activos. El contrato didáctico se identifica como un contrato socrático basado en un enfoque de tipo conferencia. En la sesión didáctica de Christian, el profesor ignora el trabajo de simulación de los alumnos y las interacciones profesor-alumno son limitadas.

5. Conclusiones, debate y perspectivas

5.1 Conclusiones

5.1.1 Reconocer y caracterizar los contratos didácticos mediante la identificación de patrones y ritmo

Nuestra descripción y caracterización de los diferentes contratos fuertemente didácticos se basa en los *constructos* teóricos de las TSD y ThETM. La devolución y la institucionalización (parcial o global) se refieren al TSD y destacan los principales episodios que apoyan el análisis en términos de ThETM. El uso de los diferentes planos del ETM muestra la naturaleza del trabajo implicado en las diferentes acciones de los estudiantes, así como la circulación del trabajo. También pone de relieve las responsabilidades respectivas de alumnos y profesores en la progresión del trabajo.

Para el análisis de los ETM idóneo potenciales y efectivos, diseñamos y aplicamos un sistema de codificación basado en estos constructos. Esto nos permitió representar los distintos itinerarios y caminos y observar la repetición de ciertos patrones. Esta repetición confiere a la sesión su ritmo y su código de colores, elementos importantes para la identificación de los contratos.

5.1.2 Dos grandes familias de contratos globales: los contratos constructivos y los contratos socráticos

El contrato *constructivo* alude a un enfoque social y constructivista del aprendizaje y observamos allí una diferencia entre los contratos potenciales y los efectivos. El contrato potencial pretende ser abierto y animar a los alumnos a encontrar sus propias soluciones, que idealmente deberían llevarlos a construir o identificar el conocimiento objetivo. El contrato didáctico efectivo es un contrato constructivo supervisado en el que el profesor supervisa y regula el trabajo de los alumnos eligiendo el modelo probabilístico e imponiéndolo progresivamente a todos ellos. La diversidad de modelos probabilísticos y la variedad de pruebas inicialmente posibles se limitan progresiva y estrictamente a una simulación basada en un único modelo con un único artefacto.

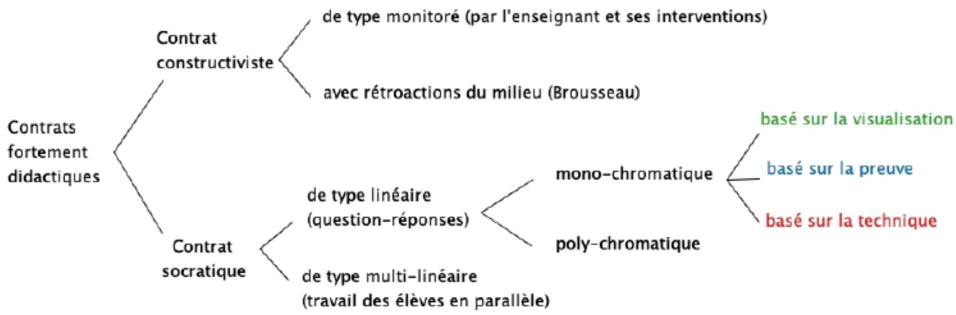
El *contrato socrático*, o *mayéutico*, se basa en un redescubrimiento guiado del conocimiento. Los profesores dividen la tarea principal en subtareas. El contrato socrático puede ser multilineal o lineal, según el grado de libertad que se dé a los alumnos. Observamos una sucesión de patrones que marcan fuertemente el ritmo de la sesión y caracterizan un contrato que oscila entre el profesor y el alumno: el profesor organiza y dirige la sesión, mientras que los alumnos siguen y aplican las directrices del primero.

5.1.3 Contratos locales para precisar el contrato global

La atención específica que prestamos a la fase de institucionalización reveló algunos contratos locales que difieren de los anteriores contratos didácticos globales identificados, pero que podría decirse que están relacionados con formas del contrato socrático lineal. Estos pueden basarse en una serie de interacciones en torno a las preguntas de los profesores y las reacciones de los alumnos. Dependiendo de la elección del profesor, el código de colores del contrato puede cambiar.

Puede favorecer la dimensión semiótica y basarse en la visualización: en este caso, se aproxima al contrato de ostensión de Brousseau. En otra forma, basada en la conferencia, el profesor favorece la dimensión discursiva e insiste en la prueba formal. Podemos conjeturar que existe un contrato centrado en la dimensión instrumental con dimensiones de construcción y cálculo. Consideramos que estas formas son relevantes para el surgimiento específico del contrato socrático. Aunque en nuestro estudio estos contratos aparecen durante la fase de institucionalización, probablemente puedan considerarse contratos globales (véase 5.2). Nuestro estudio ha dado como resultado una clasificación de contratos fuertemente didácticos (figura 8).

Figura 8. Clasificación de los contratos muy didácticos



Fuente: elaboración propia.

5.1.4 Diferentes naturalezas del contrato y del color del trabajo matemático

A partir de nuestro estudio, podemos concluir que el contrato global a lo largo de una situación de instrucción, y de hecho a lo largo de un programa de instrucción a largo plazo, puede no ser homogéneo. En concreto, su código o coloración puede cambiar. Como se mencionó anteriormente, el estudio de la circulación del trabajo a través de los diferentes planos del ETM, muestra los planos favorecidos en el trabajo matemático real. El código de colores revela las formas de trabajo matemático priorizadas por el profesor en el aula. Así, es posible afinar los contratos didácticos observando si el trabajo matemático es homogéneo y se sitúa siempre en el mismo plano, o si el profesor propone el acceso a diferentes planos. En particular, el código de colores especifica el significado que se da a los conocimientos, las técnicas y la visualización en el trabajo de los alumnos. Esta distinción es importante para identificar lo que es un contrato fuertemente didáctico: en efecto, existe una importante diferencia de naturaleza entre un contrato que privilegia las técnicas con o sin justificaciones, o uno basado en la demostración de pruebas, etc.

5.2 Debates

5.2.1 Comparación con los contratos identificados por Brousseau

En su densísimo estudio (Brousseau, 1997a), Brousseau (2.1.1) se basa en su larga experiencia como investigador y profesor para distinguir varias formas de contratos fuertemente didácticos. Enumera y describe detalladamente seis contratos, pero no proporciona explícitamente criterios para diferenciarlos y organizarlos. Nuestro enfoque, que se basa en esta investigación pionera, es diferente y se centra en un trabajo matemático que intenta categorizar los contratos existentes en la enseñanza escolar. La clasificación se estructura en torno a dos contratos principales (figura 8) con diferentes subformas o tipos según el ritmo y la coloración de algunos patrones identificados. Entre estos contratos, algunos tienen nombres similares a los de Brousseau, pero son diferentes: constructivo y socrático. Los contratos de ostensión y de reproducción están próximos a dos de los contratos monocromáticos (visual y de lectura). Parecían contratos locales durante la fase de institucionalización y pueden considerarse formas específicas del contrato socrático. Se trata de afirmar si el contrato global puede ser homogéneo y basarse en este tipo de contrato. Este parece ser el caso de la forma del contrato socrático basada en la conferencia, sobre todo en la enseñanza superior, donde el curso se centra en la transmisión de conocimientos organizados en un dominio matemático. En el caso del contrato visual, no es fácil imaginar esta forma como global, pero Salin (1999) ha destacado la alta frecuencia de la práctica ostensiva en la enseñanza elemental con niños pequeños. Los contratos didácticos parecen depender del nivel educativo, del tipo de formación (profesional o general) e incluso de la competencia de los alumnos en matemáticas.

5.2.2 Distinción entre teorías del aprendizaje y contratos didácticos

Como ya se ha mencionado, el contrato constructivo se inspira en el enfoque socioconstructivista del aprendizaje, pero no conservamos este nombre para denominar este contrato específico. Del mismo modo, no identificamos un contrato conductual. Ambas teorías son teorías del aprendizaje y no se relacionan explícitamente con la educación en un contexto académico en el que la importancia de la enseñanza de una disciplina y de los conocimientos académicos reside principalmente en las interacciones entre alumnos y profesores. A este respecto, también parece importante hacer una distinción clara entre las teorías del aprendizaje y los contratos didácticos: los contratos didácticos nos permiten explicar cómo se configura el conocimiento que se enseña.

Por otra parte, pueden existir distintos tipos de contrato para una misma concepción del aprendizaje. Por ejemplo, en el caso de las teorías socioconstructivistas, el contrato supervisado es una forma de gestionar el progreso del trabajo guiando a los alumnos a través del *feedback* del profesor. El enfoque de Brousseau es diferente porque se basa en la retroalimentación del *medio* (artefactos, resultados, etc.) para hacer avanzar los conocimientos de los alumnos y disminuir las intervenciones del profesor. Este enfoque abrió el camino a otra forma de contrato fuertemente didáctico que denominamos contrato de Brousseau o contrato a-didáctico.

5.2.3 Articulación entre contratos y trabajos matemáticos

Además de la distinción entre teorías del aprendizaje y contratos didácticos, también es necesario articular claramente los contratos y las formas del trabajo matemático. Estas formas dependen de la circulación del trabajo entre los diferentes planos del ETM. Para un mismo contrato didáctico global, las variaciones entre profesores se referirán a la elección de las tareas y, sobre todo, a su gestión en las aulas en las que se deja la iniciativa a los alumnos. Se les pueden asignar solo tareas rutinarias circunscritas al plano verde [Sem-Ins], o tareas más técnicas, lo que supone una articulación de las dimensiones discursivas en torno a la dimensión instrumental, plano rojo [Ins-Dis]; o finalmente, pueden tener un papel importante en el plano azul [Sem-Dis]. Cada una de estas formas puede vincularse a una visión particular del trabajo del alumno: la primera está orientada a la aplicación, la segunda al dominio de los aspectos técnicos y la última a la comprensión de la prueba discursiva. La articulación de todos los planos lleva a los alumnos a completar con éxito el trabajo matemático.

5.3 Perspectivas

El estudio de la relación entre los contratos fuertemente didácticos y las situaciones de instrucción proporciona una definición más precisa de estos contratos. Además, aporta elementos para describirlos, utilizando los patrones asociados a formas particulares de trabajo. El estudio también plantea nuevas cuestiones que nos proponemos explorar en futuras investigaciones.

5.3.1 Seguir desarrollando y completando el estudio de los contratos didácticos globales

Tenemos previsto utilizar la metodología desarrollada en esta investigación para seguir investigando los contratos identificados y describir otros tipos de contratos.

Tenemos que comprobar si los contratos dependen del nivel educativo (primaria, secundaria, universidad), del tipo de formación (profesional o general) o de la competencia de los alumnos en matemáticas, y de qué manera. Por ejemplo, en la universidad nuestro equipo está desarrollando un estudio multidisciplinar sobre las prácticas docentes. En él se identifican contratos asociados a clases magistrales impartidas en grandes aulas que se alternan con sesiones prácticas destinadas a clases más reducidas. La alternancia de contratos se basa en diferentes estructuras de enseñanza.

5.3.2 Estudiar las variaciones del trabajo matemático dentro de un determinado contrato didáctico

En este artículo, definimos el color del trabajo matemático observando y codificando los planos y las dimensiones del ETM movilizados. Es necesario un estudio más detallado para evaluar el impacto de esta coloración en los contratos didácticos. En efecto, podemos conjeturar que el hecho de ser siempre ejecutor, técnico o investigador influye en el contrato didáctico, ya que las expectativas de los alumnos son diferentes (Nechache, 2017). También podemos suponer que algunas de las reacciones a menudo negativas de los alumnos ante las matemáticas se deben a una enseñanza que los confina con demasiada frecuencia a un papel de repetidor y ejecutor. Esto plantea cuestiones relativas a la elección de las tareas que se dan a los alumnos, que pueden ser tareas ricas, complejas o simples (White y Mesa, 2014).

5.3.3 Ampliación de la formación del profesorado, utilización de nuestra codificación basada en la teoría ETM como herramienta de análisis de las sesiones de clase

La codificación, con los elementos de la teoría ETM utilizados, es relativamente sencilla de realizar y proporciona rápidamente una visión general del contrato aplicado. Las trayectorias y los caminos visualizados de este modo permiten identificar y discutir las formas de contrato que surgen en las situaciones de enseñanza. De este modo, sería posible poner de relieve las variaciones de los contratos a lo largo de una sesión, así como las diferencias entre el trabajo potencial y el trabajo real. En particular, este uso parece pertinente en el contexto de los estudios de lecciones, en los que los profesores necesitan argumentos para abordar lo que han observado.

6. Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997a). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer academic publishers. Hal. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00699759

Brousseau, G. (1997b). Théorie des situations didactiques, le cours de Montréal. https://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Henriquez, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. En Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 121-146). Springer. https://10.1007/978-3-030-90850-8_6

Hershkowitz, R., Schwarz, B. y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222.

Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 113-151. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2183-z

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/ s11858-016-0812-x

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces.* Springer. https://10.1007/978-3-030-90850-8

Lefebvre, H. (1992). *Elements de rythmanalyse. Introduction à la connaissance des rythmes.* Syllapses.

Masselin, B. (2019). *Étude du travail de l'enseignant sur la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité.* Doctoral dissertation, Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02507438

Masselin, B. (2020). Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilités : Une étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *25*, 49-88. https://doi.org/10.4000/adsc.529

Masselin, B., Kuzniak, A. y Hartmann, F. (2020). Study of collaborative work developed as part of doctoral research articulated with a teacher training. En Borko, H. y Potari, D. (eds.), *ICMI Study 25, Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 238-245). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03198065

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *22*, 67-90. https://doi.org/10.4000/adsc.709

Perrin-Glorian, M. J. y Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(2), 217-276.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique [The didactic contract]. *Revue Française de Pédagogie*, *112*, 85-118.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Salin, M. H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. En Lemoyne, G. y Conne, F. (eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Presses de l'Université de Montréal.

Vandebrouck, F. (2018). Activity theory in french didactic research. En Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E. y Xu, B. (eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 679-698). ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

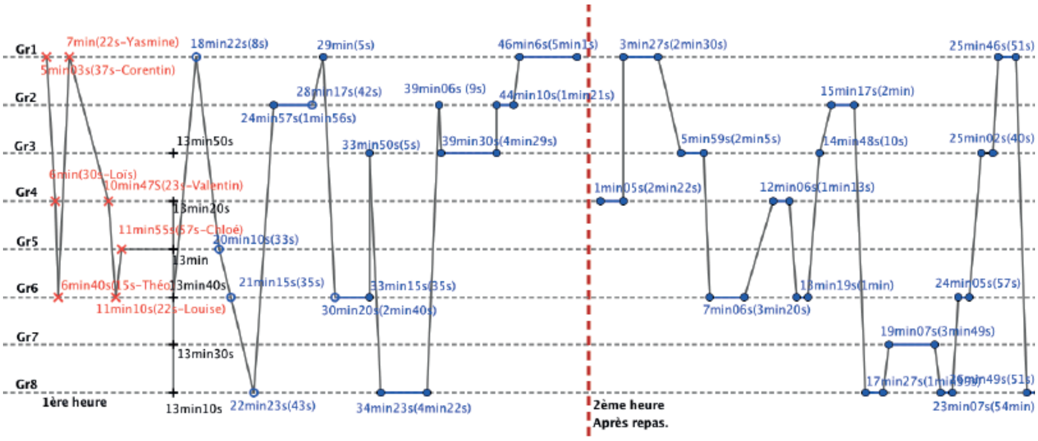
White, N. y Mesa, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 675-690. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0588-9

Apéndice 1: Cronograma

El cronograma es una herramienta metodológica que ayuda a visualizar la cronología de las interacciones entre el profesor y cada grupo de alumnos durante una sesión de clase. Las fechas y duraciones de cada una de estas intervenciones se recogen en una línea de tiempo.

Se identifican dos tipos de eventos y se dibujan de forma diferente en cada línea del grupo. Los puntos representan una intervención breve (menos de 30 segundos) del profesor sin intercambio con el grupo. Se marca una línea continua en la línea de grupo cuando existe una interacción más larga y significativa relacionada con el contenido matemático.

Las distintas intervenciones del profesor están unidas por segmentos y la línea discontinua muestra la cronología y el desplazamiento del profesor de un grupo a otro. El tiempo dejado al trabajo autónomo de los alumnos se marca con líneas discontinuas.



Fuente: Masselin, 2020; Henríquez *et al*., 2022.

Apéndice 2: Identificación del patrón de Emma

Patrón	Tiempo	Tareas asignadas por el profesor
N° 1	16’	*Devolución* 10:08. Emma: “He aquí una actividad de descubrimiento, te daré el enunciado. Juega cinco partidas con los dados que tienes en tu mesa. Cuenta el número de veces que gana la liebre o la tortuga”. *Acción de los estudiantes* Grupos de alumnos juegan a una serie de juegos y obtienen diferentes resultados. *Síntesis e institucionalización local* 10:23. Emma recoge los resultados de cada grupo. 10:25. Emma: *institucionalización local* “algunos encuentran la liebre; no hemos jugado suficientes partidos”.

Patrón	Tiempo	Tareas asignadas por el profesor
N° 2	5'	10:25. *Explicación de las reglas del juego y justificación de la simulación* Emma tira su dado de goma y obtiene diferentes caras del dado. En cada lanzamiento, pide a los alumnos que ganan que se aseguren de haber entendido las reglas. *Acción y resultados* Los alumnos responden a las preguntas de Emma en lanzamientos sucesivos. Cuando aparece un seis, Emma pregunta a la clase: "¿Quién cree que ganó la liebre?". "¿Quién cree que la liebre tiene más posibilidades de ganar, basándose en su experimento?". Emma escribió en la pizarra: "4 grupos Tortuga y 2 grupos Liebre". Un estudiante dice: "Deberían hacerse más lanzamientos, por ejemplo, con una hoja de cálculo, ya que eso podría permitir varios cientos de lanzamientos". *Institucionalización*. Emma escribió en la pizarra: "Simulación, Hoja de cálculo, Scratch para lanzar varios cientos de lanzamientos".
N° 3	6'	*Devolución* 10:28. Emma: "Usando una hoja de cálculo o usando Scratch, puedes simular varios cientos de lanzamientos, el ordenador puede hacerlo por ti. Hacemos una simulación. Vamos al archivo... elegimos Scratch". *Acción* Cada grupo abre el archivo de simulación. *Resultados* Ejecutan el programa varias veces para obtener varias simulaciones de juego. *Institucionalización local. No es necesario*
N° 4	29'	*Devolución* 10:31. Emma: "Te conectas, ves la tabla y la rellenas. ¿Cuál es la frecuencia con la que gana la tortuga? Es el cociente del número de partidas ganadas por la tortuga sobre el número total de partidas". 0:34. Emma: "Vamos, tienes que rellenar la tabla y crear el gráfico". *Acción* Los grupos trabajan en sus tablas y gráficos. *Resultados* Emma recoge las producciones de los grupos (tablas y gráficos). *Pausa de 15 minutos para los estudiantes.*
N° 5	29'	11:34. Conclusión sobre la institucionalización.

Fuente: elaboración propia.

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 14-05-24 | Aceptado: 09-08-24 | Publicado: 20-12-2024

RELACIONES TEÓRICAS EN EL ETM IDÓNEO EFECTIVO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

THEORETICAL RELATIONSHIPS IN THE EFFECTIVE SUITABLE MWS OF SECONDARY EDUCATION TEACHERS

CAROLINA HENRÍQUEZ-RIVAS
Universidad Católica del Maule
Talca, Chile
chenriquezr@ucm.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4869-828X

ANDREA STEPHANIE VERGARA GÓMEZ
Universidad Católica del Maule
Talca, Chile
avergarag@ucm.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6388-8412

ESTUDIOS

Resumen

La investigación reciente destaca la necesidad de conectar el trabajo matemático del profesorado con modelos teóricos existentes. De aquí que el presente estudio pone atención en relaciones teóricas del trabajo matemático en el aula de profesores de educación secundaria, con énfasis en la enseñanza de la geometría, sustentado en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). La metodología se basa en un enfoque mixto secuencial. En una primera fase, de carácter cuantitativo, se realiza un análisis de variables categóricas, considerando una muestra de 63 profesores, lo cual permite analizar las relaciones entre componentes teóricas del ETM y el diseño de tareas. Luego, en una fase cualitativa, se entrevista a un profesor, como caso representativo, para profundizar en dichas relaciones. Los resultados permiten mostrar interpretaciones sobre las relaciones entre componentes teóricas en el ETM de los profesores participantes con base en la evidencia empírica. Finalmente, las relaciones teóricas pueden ser consideradas en investigaciones futuras para la valoración de los ETM del profesorado, el diseño de tareas, o bien para la investigación centrada en la enseñanza.

Palabras clave: Espacios de Trabajo Matemático, profesor, ETM idóneo efectivo, relaciones teóricas.

Abstract: Recent research highlights the need to connect teachers' mathematical work with existing theoretical models. Thus, the present study pays attention to theoretical relationships of mathematical work in the classroom of secondary education teachers, with emphasis on the teaching of geometry, supported by the theory of Mathematical Working Spaces (MWS). The methodology is based on a sequential mixed approach. In a first phase, of a quantitative nature, an analysis of categorical variables is carried out, considering a sample of 63 teachers, which allows analyzing the relationships between theoretical components of the MWS and the design of tasks. Then, in a qualitative phase, a teacher is interviewed, as a representative case, to delve into these relationships. The results allow us to show interpretations about the relationships between theoretical components in the MWS of the participating teachers based on empirical evidence. Finally, theoretical relationships can be considered in future research for the assessment of teachers' MWS, the design of tasks, or for research focused on teaching.

Keywords: Mathematical Working Spaces, teacher, effective suitable MWS, theoretical relationships.

1. Introducción

El campo de investigación de la Educación Matemática ha experimentado el desarrollo de diversas posiciones teóricas y metodológicas, líneas y comunidades de investigación que contribuyen a abordar y explicar problemáticas desde diferentes puntos de vista (*e. g.*, Bikner-Ahsbahs *et al.*, 2015; Lerman, 2020). Asimismo, la investigación reciente destaca la necesidad de estudiar al profesorado con atención en la planificación e implementación de la enseñanza (Cevikbas *et al.*, 2024). Especialmente en el dominio de geometría, algunos estudios analizan el trabajo geométrico de profesores sustentado en diversos modelos teóricos existentes (Clemente y Llinares, 2015; Zakaryan y Sosa, 2021; Henríquez-Rivas *et al.*, 2021b). De aquí que el presente reporte pone atención en relaciones teóricas del trabajo matemático de profesores de educación secundaria, con especial atención en la enseñanza de la geometría.

En estudios, como el de Climent *et al.* (2021), los autores analizan la clase de un profesor en Chile, en la que se introduce el teorema de Thales, para lo cual se utiliza el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), cuestionando la enseñanza de dicho contenido y las interacciones del profesor en el aula. En la misma línea, la investigación de Zakaryan y Sosa (2021) plantea la falta de estudios en geometría a partir de datos empíricos.

Otras investigaciones enfocadas en la enseñanza de la geometría dejan en evidencia la necesidad de instrucción y capacitación docente usando enfoques teóricos pertinentes (Sunzuma y Maharaj, 2020), así como la recomendación de realizar investigaciones de este tipo a mayor escala (Tachie, 2020). Por su parte, Guzmán Retamal *et al.* (2020) exploran en la gestión de profesores que enseñan teoremas geométricos en Chile, basados en la Teoría de Situaciones Didácticas, y evidencian la necesidad de hacer estudios de la práctica matemática en el aula de los docentes. Por ello, se plantea que un estudio que considere aspectos teóricos sobre la enseñanza del profesorado basado en evidencia empírica puede ser un aporte al campo disciplinar.

Algunas investigaciones ponen atención en procesos cognitivos específicos en el dominio geométrico (*e. g.*, Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). La investigación de Ayvaz *et al.* (2017) analiza las imágenes conceptuales de futuros profesores de Turquía, en relación con conceptos y propiedades geométricas elementales y revelan dificultades relacionadas con el proceso de prueba. Por su parte, Creager (2022) explora un aspecto del razonamiento, las refutaciones geométricas de futuros profesores de Estados Unidos, y plantea algunas sugerencias para preparar mejor a los profesores en formación en este ámbito. En Salazar (2018) se exploran tres actividades cognitivas asociadas con los registros de representación semiótica en geometría dinámica, dando cuenta de la relevancia de realizar aportaciones teóricas en este sentido.

Así, el profesorado desarrolla sus propias estrategias para la enseñanza de la geometría, dejando en evidencia la necesidad de estudiar su gestión en el aula. Asimismo, la formación de profesores debe considerar experiencias de enseñanza y evidencia empírica que permita llevar el discurso teórico a la práctica. Y si bien se dispone de un amplio campo de investigación sobre aspectos teóricos y empíricos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, especialmente en secundaria (Herbst *et al.*, 2018), un estudio que aporte en la definición de relaciones sobre el trabajo del profesorado, a partir de evidencia empírica sobre la enseñanza de la geometría en temáticas de educación secundaria, se plantea como un aporte a la disciplina. Por ello, el objetivo de investigación es *analizar relaciones teóricas en el trabajo matemático de profesores, en la enseñanza de temáticas de geometría de educación secundaria*. El sustento teórico del estudio contempla una teoría particularmente pertinente para el estudio del trabajo matemático del profesorado, conocida como Espacios de Trabajo Matemático.

2. Marco teórico

Una teoría que ha reportado avances en los últimos años y es usada para analizar el trabajo matemático del profesor desde diversos puntos de vista (en la planificación de la enseñanza, en el aula, en la evaluación de aprendizajes, en el diseño de tareas, en la formación) es conocida como los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) (Kuzniak *et al.*, 2022). Los ETM se reconocen como una teoría didáctica que relaciona los contenidos matemáticos, combinando estrechamente aspectos epistemológicos de las matemáticas y procesos cognitivos de los sujetos (Radford, 2017). La riqueza de este corpus teórico favorece la profundización en el estudio del trabajo matemático que realizan tanto profesores como estudiantes (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022; Menares y Vivier, 2022).

Esta teoría se ocupa de la descripción, comprensión y formación del trabajo matemático de los actores educativos, para poder actuar sobre estos fenómenos (Kuzniak, 2022). De este modo, el objetivo de la teoría de los ETM es el estudio didáctico del trabajo matemático en el que participan estudiantes y profesores, a fin de contribuir a la comprensión del trabajo de personas que resuelven tareas, además, permite caracterizar los caminos que emergen en su resolución (Kuzniak *et al.*, 2016). Asimismo, algunos trabajos muestran los ETM como una herramienta analítica y metodológica para la investigación asociada al estudio de tareas matemáticas (*e. g.*, Kuzniak y Nechache, 2021; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021; Nechache y Gómez-Chacón, 2022).

La teoría de los ETM considera, por una parte, los principios epistemológicos de los objetos que se estudian dentro de un dominio matemático (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016) y, por otra, el componente humano (o social), lo que implica examinar una dimensión cognitiva, relacionada con la dimensión epistemológica (Kuzniak, 2022). Estas dos dimensiones, llamadas planos epistemológico y cognitivo, pretenden captar los contenidos matemáticos del dominio estudiado y la actividad cognitiva del individuo cuando adquiere, desarrolla o utiliza esos contenidos matemáticos (Kuzniak, 2011).

El plano epistemológico tiene tres componentes: el *representamen*, asociado con un conjunto de símbolos concretos y tangibles en función de las interpretaciones y relaciones construidas por el individuo; los *artefactos*, como herramientas de construcción, un software o un sistema simbólico, empleado como un instrumento para la acción; un *referencial teórico* basado en definiciones, propiedades y teoremas.

El plano cognitivo se organiza en torno a tres procesos: la *visualización*, relacionada con el desciframiento e interpretación de signos; la *construcción*, basada en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas; la *prueba*, entendida como todo razonamiento discursivo que permite formular argumentaciones, demostraciones, definiciones, hipótesis y conjeturas, y enunciar contraejemplos, con apoyo del referencial teórico (Kuzniak, 2022; Kuzniak *et al.*, 2016).

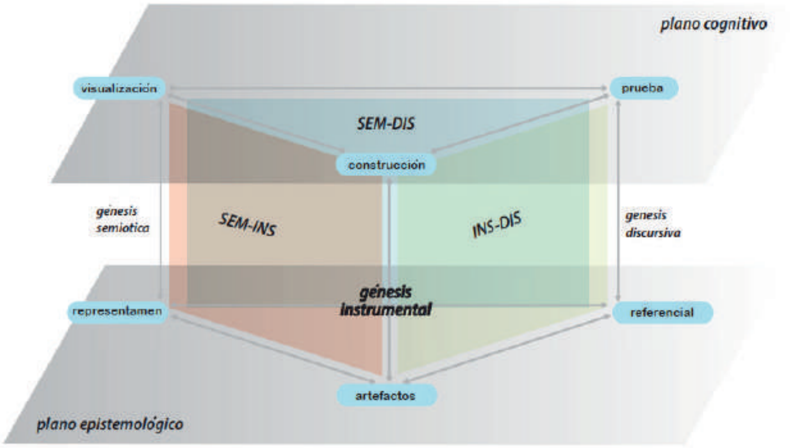
La articulación entre dichos planos se realiza mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, que permiten coordinar y explicitar la naturaleza del trabajo matemático en diversos contextos educativos e institucionales (Kuzniak, 2011). La génesis semiótica representa la relación entre el objeto matemático y el proceso cognitivo de visualización para dotarlo de significado. En la génesis instrumental se hacen operativos los artefactos, a través de la construcción realizada por un individuo. La génesis discursiva relaciona el referencial y los procesos de prueba.

En la investigación de Coutat y Richard (2011) se reconoce la idea de planos verticales, entendidos como las interacciones entre dos génesis y los componentes implicados (Kuzniak y Richard, 2014). En estas interacciones se identifican tres planos verticales diferentes (Kuzniak *et al.*, 2016):

- Plano vertical [Sem-Ins], asociado con el uso de los artefactos en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o en la exploración de representaciones semióticas.
- Plano vertical [Ins-Dis], cuando el proceso de prueba está basado en una experimentación con empleo de un artefacto, o bien en la validación de una construcción.
- Plano vertical [Sem-Dis], relaciona la coordinación del proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento de validación.

La relación entre los planos, componentes, génesis y planos verticales se ilustra en el siguiente diagrama (figura 1).

Figura 1. Diagrama del ETM



Fuente: adaptado de Kuzniak *et al.*, 2016, p. 863.

De lo anterior, la investigación en ETM se basa en estudiar y comprender la dinámica del trabajo matemático mediante el papel de cada una de estas génesis y sus interacciones cuando el individuo resuelve tareas específicas (Kuzniak, 2018). Por ello, las tareas ocupan un lugar importante en la teoría de los ETM, pues son entendidas como el medio para la resolución de problemas (Kuzniak, 2022). Si bien las tareas, su diseño e implementación no son una componente explícita del modelo, se entiende como las que activan el trabajo matemático (Kuzniak, 2011) y, por ende, se trata de un asunto de relevancia en la investigación bajo esta perspectiva (*e. g.*, Kuzniak y Masselin, 2024).

Finalmente, se distinguen tres tipos de ETM que dependen del propósito de la investigación, de sus usuarios, de su posición en una institución escolar y de su rol en la implementación del currículo escolar (Gómez-Chacón *et al.*, 2016): *ETM de referencia*, relacionado con personas o instituciones responsables de la institución escolar de acuerdo con criterios matemáticos (Montoya-Delgadillo y Reyes-Avendaño, 2022); *ETM personal*, vinculado con la realidad del trabajo de los estudiantes cuando se apropian y manejan la resolución de problemas (Menares-Espinoza y Vivier, 2022); *ETM idóneo*, entendido como el modo en que un contenido matemático desarrollado por un profesor o investigador se diseña, adapta y se propone para la enseñanza en un lugar y contexto determinados (Henríquez Rivas *et al.*, 2021b).

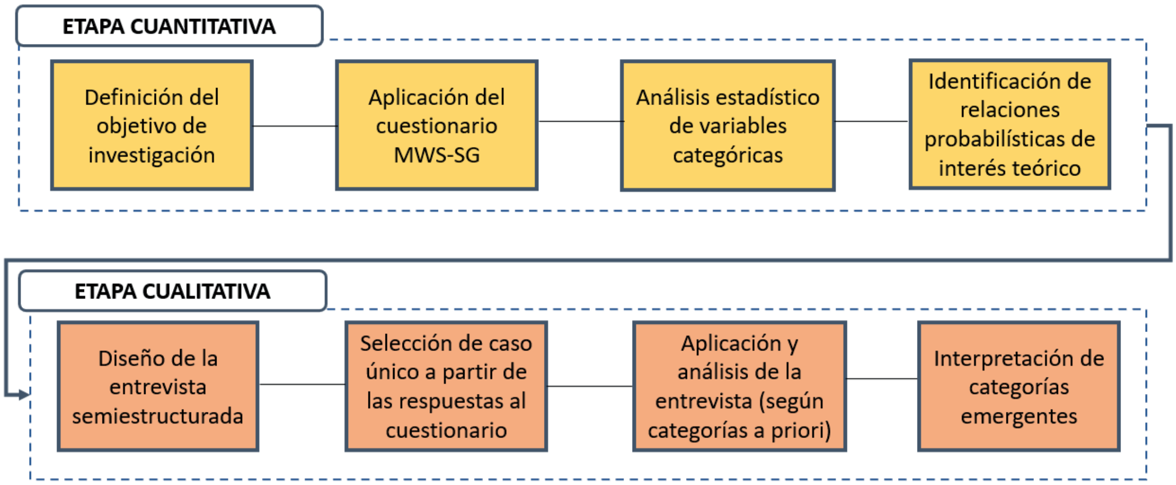
En particular, el presente estudio pone atención en el ETM idóneo de profesores cuando enseñan un tema matemático en el aula, entendido como *ETM idóneo efectivo* (o actual) del profesorado (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022). Asimismo, las *relaciones teóricas* que son estudiadas consideran los vínculos entre componentes, génesis y planos verticales del ETM y, también, particularidades de este tipo de ETM en juego.

3. Metodología

En esta investigación se asume un enfoque mixto, de tipo secuencial explicativo (Bergman, 2008), es decir, primero se aborda la problemática desde una perspectiva cuantitativa y, luego, a partir de los resultados obtenidos, se toman decisiones respecto de cómo profundizar en términos cualitativos. Así, bajo este enfoque mixto (Creswell y Creswell, 2023), se analizan las relaciones entre elementos teóricos del ETM. En la etapa cuantitativa, se aplica un cuestionario MWS-SG, diseñado para reconocer variables relevantes desde la perspectiva teórica del ETM. A partir de estos datos se realiza un análisis estadístico entre variables categóricas, mediante el uso de tablas de contingencia, lo que permite identificar implicancias probabilísticas de interés.

En la etapa cualitativa, para profundizar en aspectos de las relaciones teóricas, se adoptó un estudio de caso basado en Yin (2018), seleccionando un *caso único* que se define como representativo y revelador dentro del grupo de profesores informantes, de acuerdo con los resultados obtenidos en la primera etapa. Este caso es *holístico* en la medida que permite ahondar en aspectos específicos de la enseñanza de la geometría en el marco del trabajo matemático idóneo del profesor como unidad de análisis. La justificación de este diseño permite profundizar en relaciones teóricas del ETM idóneo efectivo del profesor. Así, en esta etapa se realiza una entrevista semiestructurada con el propósito de indagar en dichas implicancias probabilísticas, buscando una mayor comprensión desde un caso particular. El flujo del trabajo investigativo se sintetiza en el siguiente esquema (figura 2).

Figura 2. Flujo del trabajo investigativo



Fuente: elaboración propia.

3.1 Muestra y sujetos informantes

La población de este estudio son profesores de matemáticas en servicio de Chile, que al momento de la investigación se encontraran realizando clases en el nivel Primero Medio (14 años aproximadamente). Esto debido a que el estudio se desarrolla en el marco de un proyecto de investigación más amplio, el cual considera la enseñanza en el dominio de geometría de los temas teorema de Thales, homotecia y semejanza de figuras; temas ubicados en dicho nivel escolar.

La muestra para el análisis cuantitativo de los datos se conformó por 63 profesores en ejercicio, que cumplían con las características anteriores y que contestaron de manera libre y voluntaria un cuestionario. Para la implementación del instrumento y el procesamiento de datos se tomaron todas las medidas éticas correspondientes, incluyendo la firma del consentimiento informado por parte de los profesores participantes.

En la etapa cualitativa, se consideró un profesor cuya experiencia en la educación secundaria (15 años), interés por participar en el estudio y claridad para explicar aspectos de su desempeño en la enseñanza resultan relevantes para profundizar en las relaciones identificadas en el análisis cuantitativo. Al profesor se le aplicó una entrevista semiestructurada con el propósito de comprender las relaciones entre las características de su trabajo matemático y el diseño de tareas que son usadas en el aula.

3.2 Instrumentos

Para la toma de datos desde el enfoque cuantitativo se utilizó un cuestionario de respuesta forzada (Bartram, 2007), previamente validado, cuyos ítems fueron diseñados y estructurados de acuerdo a los lineamientos teóricos del ETM idóneo del profesor. Los detalles sobre el proceso y el tipo de validación del instrumento (MWS-SG Questionnaire) son parte de un artículo que se encuentra en etapa de evaluación por pares.

Para la toma de datos desde el enfoque cualitativo, la entrevista fue diseñada por las investigadoras de acuerdo a la literatura sobre el marco teórico del estudio, y con base en las relaciones conceptuales que arrojaron mayor grado de implicación, según los resultados de la etapa cuantitativa. El instrumento se organiza en 4 preguntas abiertas orientadas a profundizar y extender en aspectos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático de los profesores informantes, y sobre el diseño de tareas para la enseñanza. La entrevista fue administrada por una de las investigadoras, previo consentimiento informado en reunión individual con el profesor. En la siguiente tabla 1 se muestran las preguntas planteadas y se explicitan los elementos teóricos del ETM relacionados en cada una (las que son llamadas categorías teóricas iniciales).

Tabla 1. Preguntas planteadas en entrevista semiestructurada

Pregunta	Categorías teóricas iniciales
Con atención en la enseñanza de los temas: semejanza, teorema de Thales y homotecia, responda las siguientes preguntas.	Introducción al planteamiento de las preguntas
¿Qué fundamentos teóricos considera relevantes cuando diseña tareas para la enseñanza? Por ejemplo, en tareas de prueba, de visualización, uso de propiedades.	Fundamentos teóricos en el diseño de tareas
¿Cómo utiliza la tecnología u otras herramientas (tradicionales, como el compás) en el diseño de las tareas? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis instrumental en el diseño de tareas
¿Qué tipo de actividades de validación (o de prueba) considera en su enseñanza en el aula? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis discursiva en la enseñanza
¿Cuáles son las representaciones que privilegia en su enseñanza en el aula? ¿De qué forma las considera? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis semiótica en la enseñanza

Fuente: elaboración propia.

Cabe señalar que, tanto en la consulta realizada a través del cuestionario como a través de la entrevista, el diseño de tareas se da a entender como el proceso mediante el cual el profesor diseña por sí mismo y de manera auténtica una tarea o actividad de aprendizaje para su clase de geometría.

3.3 Técnicas de análisis

En el análisis cuantitativo, se usan tablas de contingencia para evidenciar relaciones entre variables categóricas binomiales, a través del uso de los estadísticos *odds* y *odds ratio* (Agresti, 2002). Para distribuciones conjuntas con probabilidades de celda π_{ij}, la definición para el *odds* en la fila *i* es $\Omega_i=\pi_{i1}/\pi_{i2}$, con i=1,2, mientras que la definición para los *odds* ratio es $\theta=\Omega_1/\Omega_2$. Las respuestas del cuestionario (alternativas forzadas) son dicotomizadas en función de aspectos teóricos de interés. Las tablas de contingencia son tablas de doble entrada, donde las dos categorías (excluyentes) de la variable X se organizan en las filas y las dos categorías de la variable Y, que determinan la condición de éxito (y no éxito), se organizan en las columnas. Estas tablas permiten reconocer una distribución de probabilidad para la muestra de informantes, a partir del recuento de frecuencias. Se analizaron comparativamente relaciones mediante el cálculo de los *odds* ratio. Los *odds* ratio son valores no negativos. El valor 1 corresponde a la independencia entre las variables X e Y. Cuando el valor resultante n es mayor a 0 y distinto de 1 (eventualmente mayor que 1), este representa que el *odds* de éxito en la fila 1 es n veces el *odds* de éxito de la fila 2. Esto no significa que la probabilidad $\pi_1=n\cdot\pi_2$. Cuando una celda tiene probabilidad cero, el valor del *odds* ratio de la tabla inevitablemente será igual a 0 o ∞. Los valores más alejados de 1,0 en una dirección determinada representan una asociación fuerte y dos valores representan la misma asociación, pero en una dirección opuesta, cuando una es la inversa de la otra.

En el análisis cualitativo, la entrevista se llevó a cabo de forma virtual, a través de una plataforma que permitió su grabación y, posteriormente, fue transcrita para el análisis y codificación. Las categorías teóricas iniciales sirven como punto de partida en esta etapa de los análisis (véase tabla 1). Posteriormente surgen categorías emergentes (inductivas) que reflejan las relaciones teóricas en los ETM a partir del discurso del profesor.

Así, los datos son analizados mediante el análisis de contenido (Leavy, 2014), realizado de forma inductiva y gestionados mediante el software ATLAS.ti (23). La información fue triangulada mediante las (dos) investigadoras del estudio (Utsumi, 2016), quienes revisaron de forma separada las respuestas y asignaron códigos a las categorías emergentes que relacionan elementos teóricos de los ETM, para luego reunirse y comparar la información recopilada. Esto permitió realizar procedimientos de triangulación de investigadores, pues ambas poseen distinta experiencia y formación (Gurdián-Fernández, 2007). Posteriormente, las investigadoras analizaron en conjunto las categorías emergentes y códigos asignados hasta llegar a un consenso que les permitió interpretar la información (Creswell y Creswell, 2023).

4. Resultados

4.1 Análisis cuantitativos

El análisis entre variables categóricas arrojó más de 10 relaciones con valores que podrían ser de interés desde el punto de vista estadístico. No obstante, se han seleccionado 4 de tales relaciones, debido a que su interpretación es relevante desde el punto de vista teórico. Los resultados se expresarán en términos de comparación de *odds* (o proporciones). También, se complementará el análisis con el cálculo del riesgo relativo para la categoría del "no éxito" (categoría B), teniendo en cuenta que la noción de riesgo no necesariamente tiene una connotación negativa. La primera relación de interés que reportamos es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de fundamentos teóricos para el diseño de tareas y la acción de diseñar tareas (véase la tabla 2).

Tabla 2. Tabla de contingencia para las variables asociadas a "diseñar de tareas" y las categorías asociadas a "usar fundamentos teóricos en la enseñanza"

		Categoría A	Categoría B	Total
		Considera fundamentos teóricos en la enseñanza	No considera fundamentos teóricos en la enseñanza	
Variable 1	Diseña tareas	7	5	12
Variable 2	No diseña tareas	35	16	51
	Total	42	21	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odd ratio* $\theta=(\pi_{11}/\pi_{12})/(\pi_{21}/\pi_{22})=0,64$ indica que la proporción de profesores que considera fundamentos teóricos para abordar temas geométricos en el grupo de profesores que sí diseñan tareas inéditas es 0,64 veces la proporción de personas que considera fundamentos teóricos en el grupo que no diseña tareas. Dicho de otra manera, en la dirección opuesta, la proporción de personas que no considera fundamentos teóricos en el grupo que sí diseña tareas es 1,5625 veces la proporción de personas que no considera fundamentos en el grupo que no diseña tareas. Además, de acuerdo con la tabla, los profesores que sí diseñan tareas presentan aproximadamente 1,33 veces más riesgo de no considerar fundamentos teóricos en comparación con los profesores que no diseñan tareas. Esto quiere decir que la categoría "Fundamentos teóricos en el diseño de tareas" se presenta de manera más débil en aquellos profesores de matemáticas que prefieren diseñar por sí mismos las tareas que implementan en sus clases. Este resultado informa, por una parte, que son menos los profesores que diseñan sus propias tareas y, por otra, que estos profesores presentan una inclinación levemente más pragmática que aquellos profesores que no diseñan tareas.

La segunda relación de interés que se aborda es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de herramientas tecnológicas para el diseño de tareas y la acción de diseñar tareas (véase la tabla 3).

Tabla 3. Tabla de contingencia para las variables asociadas a "diseñar de tareas" y las categorías asociadas a "utilizar herramientas tecnológicas"

		Categoría A	Categoría B	
		Utiliza herramientas tecnológicas	No utiliza herramientas tecnológicas	Total
Variable 1	Diseña tareas	7	5	12
Variable 2	No diseña tareas	29	22	51
	Total	36	27	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que utiliza herramientas tecnológicas en el grupo que sí diseña tareas es 1,06 veces la proporción de personas que utiliza herramientas teóricas en el grupo que no diseña tareas. Además, los profesores que no diseñan tareas presentan aproximadamente 1,035 veces más riesgo de no utilizar herramientas tecnológicas en comparación con los profesores que sí diseñan tareas. Esto quiere decir que la génesis instrumental se encuentra más fortalecida en aquellos profesores que prefieren diseñar sus propias tareas para implementar sus clases de geometría.

La tercera relación de interés que se aborda es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de fundamentos teóricos, de carácter matemático, para el diseño de tareas y el hecho de considerar actividades de validación (véase la tabla 4).

Tabla 4. Tabla de contingencia para las variables asociadas a "utilizar fundamentos teóricos" y las categorías asociadas a "considerar actividades de validación"

		Categoría A	Categoría B	
		Considera actividades de validación	No considera actividades de validación	Total
Variable 1	Utiliza fundamentos teóricos	41	1	42
Variable 2	No utiliza fundamentos teóricos	20	1	21
	Total	61	2	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que considera actividades de validación en el grupo que sí utiliza fundamentos es 2,05 veces la proporción de personas que considera actividades de validación en el grupo que no utiliza fundamentos teóricos. Además, los profesores que no utilizan fundamentos teóricos presentan aproximadamente 2 veces más riesgo de no considerar actividades de validación en comparación con los profesores que sí utilizan fundamentos teóricos. Esto nos da luces acerca de una mayor presencia de la génesis discursiva en aquellos profesores que sí utilizan actividades de fundamentación teórica en sus clases de geometría, por sobre aquellos que no las utilizan. La estrecha relación entre el uso de fundamentos teóricos y la activación de la génesis discursiva es un resultado esperable, dadas las características de esta génesis y su vínculo con el referencial teórico en la matemática formal.

La cuarta y última relación de interés es aquella que vincula las categorías que refieren a privilegiar (o no privilegiar) el uso de herramientas concretas o visuales y la acción de privilegiar el uso de representaciones (véase la tabla 5).

Tabla 5. Tabla de contingencia para las variables asociadas a "privilegiar las herramientas concretas o visuales" y las categorías asociadas a "privilegiar el uso de figuras junto con otras representaciones"

		Categoría A	Categoría B	
		Privilegia figuras junto con otras representaciones	No privilegia figuras junto con otras representaciones	Total
Variable 1	Privilegia las herramientas concretas y visuales	25	10	35
Variable 2	No privilegia herramientas concretas o visuales	18	10	28
	Total	43	20	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que privilegia el uso de figuras junto con otras representaciones en el grupo que sí privilegia las herramientas concretas y visuales es 1,388 veces la proporción de profesores que privilegia el uso de figuras junto con otras representaciones en el grupo que no privilegia herramientas concretas o visuales. Además, los profesores que no privilegian las herramientas concretas y visuales presentan aproximadamente 1,25 veces más riesgo de no privilegiar figuras junto con otras representaciones en comparación con los profesores que sí privilegian herramientas concretas o visuales. A partir de lo anterior es posible evidenciar que la génesis semiótica se presenta de manera más fuerte en aquellos profesores que manifiestan mayor preferencia por el uso de herramientas en sus clases de geometría. Esta relación podría dar señales de una correspondencia entre algunos aspectos de la génesis semiótica y algunos aspectos de la génesis instrumental en el quehacer de la enseñanza de la geometría.

4.2 Análisis cualitativo

La tabla 6 muestra una sistematización del análisis de contenido realizado de forma inductiva, en el cual surgen categorías emergentes del relato del profesor entrevistado (lo llamaremos P). Además, se presentan ejemplos de citas narrativas de la entrevista, donde es posible evidenciar las relaciones teóricas con mayor claridad. Los resultados obtenidos fueron organizados a partir de la dimensión global y las categorías teóricas iniciales, previamente establecidas en la etapa cuantitativa. Luego, las categorías emergentes se organizan en función de las categorías deductivas, permitiendo profundizar en las relaciones teóricas definidas previamente.

Del análisis inductivo se obtuvieron 6 categorías emergentes. La tabla 6 muestra dichas categorías, con sus respectivas frecuencias de unidades de significado (US).

Tabla 6. Sistematización del análisis cualitativo

Dimensión global	Categorías teóricas iniciales	Categorías emergentes	Frecuencia de US
Relaciones teóricas en los ETM	Fundamentos teóricos en el diseño de tareas	Organización del referencial teórico en la enseñanza	17
		Tareas en contexto cercano del estudiante	2
	Génesis instrumental en el diseño de tareas	Tecnología para ejemplos ilustrativos	4
		Tareas en el proceso de construcción	2
	Génesis discursiva en la enseñanza	Tareas en el proceso de prueba	7
	Génesis semiótica en la enseñanza	Tareas de aplicación de conceptos	4

Fuente: elaboración propia.

Para exponer cada una de las categorías emergentes, a continuación, se han incluido ejemplos narrativos que dan cuenta de las relaciones teóricas identificadas.

4.2.1 Categoría emergente: organización del referencial teórico en la enseñanza

En esta categoría, se observa que el profesor describe cómo organiza y ejecuta la enseñanza de los temas en el aula, con la finalidad de destacar conceptos, propiedades o teoremas geométricos y la forma en que decide organizarlos al momento de ser enseñados. En la siguiente cita, se puede observar la relación entre las decisiones de estructuración de la enseñanza (de lo simple a lo más complejo) y conceptos como ángulos y figuras semejantes.

> P: …entonces parto con una idea vaga y la voy haciendo un poquito más compleja y a eso le voy sumando elementos como ángulos, trazos y las relaciones que tienen por ejemplo los ángulos de las figuras semejantes…

4.2.2 Categoría emergente: tareas en contexto cercano del estudiante

Esta categoría, cuya frecuencia en el relato del profesor tiene dos apariciones en total, se refiere a la importancia que el profesor atribuye al desarrollo de tareas en el aula en contextos cercanos o reales (en el sentido de la modelación matemática).

Un ejemplo narrativo de esta categoría tiene relación con una tarea para la enseñanza de la homotecia.

> P: …resolver problemas, por ejemplo, de proyecciones, del típico de un proyector, de la ampliación de una foto, ese tipo de situaciones con homotecia.

Durante su relato, también manifiesta el desarrollo de tareas que llama "cercanas a la cotidianeidad" y que implican salir de la sala de clases y utilizar su entorno para desarrollar tareas que involucran medir y aplicar los teoremas de Thales y de Pitágoras. Si bien este tipo de tareas no están asociadas con ciertas génesis o componentes de los ETM de forma explícita, se destaca dado el rol y reconocimiento que el profesor atribuye dentro de la enseñanza.

4.2.3 Categoría emergente: tecnología para ejemplos ilustrativos

Al momento de expresar la relación entre las tareas empleadas en el aula con uso de tecnología (artefacto), el profesor describe las características de estas con uso de un software geométrico (GeoGebra) y el rol del programa en la realización de la clase. Tal como señala en el relato, el profesor lo usa principalmente para ilustrar ejemplos específicos y en tareas de comprobación en las que algunos estudiantes emplean el computador del profesor.

> P: …si bien tenemos laboratorio de computación, no hemos diseñado una clase de geometría que abarque los 90 minutos con las distintas actividades donde ellos puedan manipular el GeoGebra o un procesador geométrico, hacemos actividades de exhibición y esporádicamente ellos pasan adelante al computador del profesor que está siendo proyectado y hacen sus creaciones o comprueban algunos ejercicios que resuelven, pero nos limitamos principalmente a eso.

Se debe destacar que este tipo de tareas no están diseñadas para que los estudiantes manipulen el programa, o bien, para aprovechar el potencial dinámico de este. Situaciones de manipulación directa del software por parte de los estudiantes podrían activar la génesis discursiva del ETM u otro tipo de trabajo matemático. Sin embargo, en este caso, el uso de herramientas tecnológicas está orientada principalmente a mostrar o comprobar ejemplos particulares.

4.2.4 Categoría emergente: tareas en el proceso de construcción

En esta categoría se relacionan las tareas en la enseñanza y el proceso de construcción (y la génesis instrumental), la frecuencia en el relato del profesor tiene dos apariciones en total. Si bien no se trata de un tipo de tareas que, aparentemente, sean las más desarrolladas por el profesor, se destaca que considera el uso de ciertos artefactos tradicionales para el estudio de la homotecia, lo cual queda reflejado en su relato.

> P: Cuando comenzamos a ver homotecia, las primeras construcciones son en el plano liso, tal vez cuadriculado como para guiar un poquito más la imagen y ahí usamos transportador, regla, compas...

4.2.5 Categoría emergente: tareas en el proceso de prueba

Estas tareas, que se relacionan con el proceso de prueba (y la génesis discursiva), parecen ser relevantes en la enseñanza del profesor, otorgando valoración a este tipo de actividad y alta presencia en la enseñanza de los temas geométricos en juego. Asimismo, se destaca desde el relato del profesor que reconoce implícitamente distintos tipos de prueba, lo cual se observa en el siguiente ejemplo narrativo.

> P: Con Thales hacemos lo mismo, pero con menos frecuencia. Si con las líneas paralelas implica que los ángulos sean iguales, como que separamos las figuras en dos triángulos, [y] finalmente demuestran que son semejantes y podemos establecer proporción entre sus lados al demostrar que son semejantes. No sé si será una demostración tan formal, solamente hacemos una correspondencia entre los lados y establecemos proporciones, demostramos por lógica que son semejantes y establecemos proporciones.

Otro ejemplo narrativo que evidencia esta categoría, se relaciona con tareas de demostración en las que están presentes ciertos teoremas desde su referencial teórico.

> P: El teorema de Euclides lo demostramos a través de la semejanza, [en] el teorema de Thales también aplicamos semejanza para demostrar.

4.2.6 Categoría emergente: tareas de aplicación de conceptos

Esta categoría destaca por la relación de ciertas tareas en la enseñanza, en las que están presentes diversas representaciones semióticas (explícitas o no) de los objetos geométricos señalados y procesos de tratamiento y conversión en los que se aplican conceptos ya estudiados (Duval, 1995). Un ejemplo de esta relación se evidencia en el relato sobre una tarea que implica realizar ciertos cálculos entre elementos de figuras semejantes, usando registro numérico o algebraico.

> P: …Podemos, por ejemplo, calcular cuánto vale un trazo a partir de la medida de la otra figura, lo mismo hacemos con las figuras que no están definidas numéricamente, sino que con letras…

4.3 Integración de resultados cuantitativos y cualitativos

Los resultados cuantitativos apuntan a la prevalencia de cuatro relaciones que, en términos teóricos, se pueden interpretar como se indica a continuación:

1. Un posible realce del enfoque teórico en aquellos profesores que optan por no diseñar sus propias tareas en la enseñanza de la geometría respecto de aquellos que prefieren sí diseñar sus propias tareas.
2. Una mayor presencia de la génesis instrumental en aquellos profesores que prefieren diseñar sus propias tareas en la enseñanza de la geometría.
3. Una mayor presencia de la génesis discursiva en aquellos profesores que optan por el uso de fundamentos teóricos en sus prácticas de enseñanza de la geometría.
4. Una mayor presencia de la génesis semiótica en aquellos profesores que manifiestan mayor preferencia por el uso de herramientas en sus clases de geometría.

Al profundizar en estas relaciones, a partir del análisis cualitativo del caso del profesor, es posible advertir lo siguiente:

1. El uso de fundamentos teóricos para el diseño de tareas no está ausente, pero se presenta principalmente con el propósito de organizar los contenidos matemáticos (referencial teórico) y los aspectos contextuales de las tareas propuestas.
2. La presencia de la génesis instrumental en el diseño de tareas propias se manifiesta de dos formas: para mostrar ejemplos con apoyo de software y para explorar construcciones iniciales a partir del uso de herramientas como regla y compás. En el caso del uso de software prima la acción mostrativa del profesor, por lo que la manipulación directa por parte de los estudiantes no es el centro de la tarea.
3. La presencia de la génesis discursiva en el diseño de tareas obedece primariamente a implementar procesos de prueba que permitan demostrar la validez de las propiedades geométricas involucradas en las tareas.
4. La presencia de la génesis semiótica en el diseño de tareas se presenta en situaciones que requieren aplicar conceptos o procedimientos previamente aprendi-

dos, principalmente a través de tratamientos o conversiones entre registros. En este sentido, el uso de herramientas está asociado a la instrumentalización de los conceptos o teoremas que funcionan como artefactos simbólicos en la resolución de las tareas.

5. Discusión y conclusión

En una revisión de la literatura reciente sobre los ETM (Panqueban *et al.*, 2024) se reporta el interés, cada vez más amplio y diverso, en el estudio del ETM idóneo por la comunidad que investiga con sustento en este marco de referencia. Así, este trabajo se plantea como una contribución tanto teórica como metodológica. Desde lo teórico, se aporta al estudio y profundización del constructo ETM idóneo, específicamente, en el *ETM idóneo efectivo del profesorado*, basado en la autoinformación de sus prácticas de enseñanza. En un sentido metodológico, se presenta una forma de acceder al ETM idóneo efectivo del profesorado, en el entendido que para su estudio se pueden utilizar diversas fuentes de recolección de información (observaciones, entrevistas, análisis de documentos, entre otros), lo cual se puede reconsiderar en futuras investigaciones.

A partir del análisis cuantitativo, se destaca que los profesores que sí diseñan tareas son más propensos a no considerar fundamentos teóricos en comparación con los profesores que no las diseñan, con un riesgo relativo de aproximadamente un 33% más. Además, los profesores que sí diseñan tareas presentan menor riesgo de no incluir el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la geometría, en comparación con los profesores que no diseñan tareas, aproximadamente un 3% menos. Si bien esta cifra es menor, el análisis evidencia que existe una activación levemente mayor de la génesis instrumental en aquellos profesores que sí diseñan sus propias tareas.

Por otro lado, los profesores que no utilizan fundamentos teóricos presentan mayor riesgo de no considerar actividades de validación en comparación con los profesores que sí utilizan fundamentos teóricos, con un riesgo relativo de aproximadamente un 100% más. Este resultado se condice con el vínculo teórico que declara el ETM entre la génesis discursiva y el uso de fundamentos matemáticos, en alusión específica al referencial teórico que el profesor evoca para organizar su clase (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023). Asimismo, los profesores que no privilegian el uso de herramientas presentan mayor riesgo de no privilegiar el uso de representaciones en comparación con los profesores que sí privilegian herramientas; específicamente, un 25% más de riesgo relativo. Este resultado da cuenta de una posible relación entre la génesis semiótica y algunos aspectos de la génesis instrumental en las decisiones que despliega el profesor para la enseñanza de la geometría. A partir de los resultados cuantitativos se definen elementos plausibles de profundizar en la etapa cualitativa.

En cuanto a los análisis en la etapa cualitativa, se resalta la relevancia del profesor en poner atención al diseño de tareas con diversos propósitos para la enseñanza, lo cual queda en evidencia en el análisis de las categorías emergentes presentadas. En este sentido, el profesor analizado deja entrever la relevancia que le atribuye al diseño y la variedad de tareas implementadas en el aula dependiendo del propósito y de los objetivos de aprendizaje trazados.

De la categorización teórica presentada, basada en los resultados empíricos, las dos categorías con mayor frecuencia de unidades de significado son *organización del referencial teórico en la enseñanza* (17 US) y *tareas en el proceso de prueba* (7 US). A modo de ejemplo, la categoría que relaciona tareas y el proceso de prueba (*tareas en el proceso de prueba*) ocupa un lugar importante en la enseñanza de los temas geométricos del profesor, además, distingue y considera implícitamente tipologías de prueba (en alusión a Balacheff, 1987) cuando enseña ciertos teoremas (como Thales y Euclides). Asimismo, en esta categoría, según la perspectiva y experiencia del profesor, las tareas que implican una demostración, si bien son relevantes, son actividades más difíciles de llevar al aula, por lo que el profesor privilegia otro tipo de tareas relacionadas con la prueba y génesis discursiva. Otro aspecto a resaltar en relación con la categoría es la consideración de tareas que implican el tránsito entre el enfoque sintético y analítico en geometría (en alusión a Gascón, 2002), lo cual no siempre se considera en la enseñanza (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2015).

En cuanto a la categoría *tecnología para ejemplos ilustrativos* de conceptos, una investigación reciente basada en los ETM destaca la relevancia de su estudio en la práctica en el aula del profesorado, además, se trata de una temática abierta, especialmente, desde la perspectiva del ETM idóneo efectivo (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2024). En particular, los ejemplos que muestra el profesor para ilustrar conceptos se presentan con uso de tecnología (los que el profesor llama de “exhibición”), lo cual podría ser considerado para una investigación futura en cuanto al diseño de este tipo de ejemplos para la enseñanza y su implementación en el aula.

Si bien las *tareas en contexto cercano para el estudiante* aparecen con menor frecuencia (2), llama la atención su aparición, pues no hubo preguntas explícitas en la entrevista que se relacionaran con este aspecto. Sin embargo, el profesor las destacó como un tipo de tarea importante para relacionar el estudio de teoremas (Pitágoras, Thales) con situaciones que señala como “cercanas a la cotidianeidad”. En el caso de ahondar en este tipo de tareas dentro de la enseñanza, investigaciones previas han evaluado como pertinente, desde un punto de vista teórico, considerar de forma complementaria a los ETM, el uso de otras perspectivas teóricas como la modelación matemática (Henríquez-Rivas *et al.*, 2021a; Panqueban *et al.*, 2024).

Otro aspecto relevante de los hallazgos tiene relación con las tareas y su aparición desde los análisis como un elemento importante para el profesorado en términos de su enseñanza, tomando en cuenta que las preguntas de la entrevista no aluden a este aspecto ni a cuestiones teóricas de los ETM de manera explícita ni forzada. De aquí que este sea un asunto de relevancia para abordar en futuras investigaciones que ponen atención en el profesor y su ETM idóneo.

En cuanto a las limitaciones del estudio, una de estas se relaciona con los datos provenientes de la etapa cualitativa, pues se trata de un único profesor, por lo cual un desafío sería considerar en futuras investigaciones a más profesores pertenecientes a otros contextos. También, existen limitaciones asociadas con el diseño de caso único, pues se podría obtener resultados distintos con otros profesores. Sin embargo, consideramos que este profesor refleja, en gran medida, aspectos relevantes sobre las relaciones teóricas en el trabajo del profesorado, especialmente y como fue mencionado en el párrafo anterior, debido al énfasis en el diseño de tareas en relación con las génesis y componentes del ETM.

En futuras investigaciones, el diseño metodológico presentado se puede utilizar para propuestas de enseñanza, o bien, ampliar los casos de profesores entrevistados a un diseño de caso múltiple. De este modo, tanto los instrumentos para la toma de datos como los resultados obtenidos pueden ser usados como insumo teórico y metodológico, desde la perspectiva del ETM idóneo potencial o efectivo del profesorado, para realizar diseños, análisis *a priori* o implementaciones en el aula de propuestas de enseñanza.

Agradecimientos: Carolina Henríquez-Rivas agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, Proyecto Fondecyt de Iniciación, Folio 11230523.

6. Referencias bibliográficas

Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis*. Wiley.

Ayvaz, Ü., Gündüz, N. y Bozkuş, F. (2017). Understanding of Prospective Mathematics Teachers of the Concept of Diagonal. *Journal on Mathematics Education*, *8*(2), 165-184. http://dx.doi.org/10.22342/jme.8.2.4102.165-184

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. http://dx.doi.org/10.1007/BF00314724

Bartram, D. (2007). Increasing validity with forced-choice criterion measurement formats. *International Journal of Selection and Assessment*, *15*, 263-272. https://doi.org/10.1111/j.1468-2389.2007.00386.x

Bergman, M. (2008). *Advances in mixed methods research: Theories and applications*. SAGE.

Creager, M. A. (2022). Geometric refutations of prospective secondary mathematics teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, *10*(1), 74-99. https://doi.org/10.46328/ijemst.1594

Cevikbas, M., König, J. y Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: recent developments. *ZDM – Mathematics Education*, *56*, 101-113. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2

Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 9-27. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática*, *33*(1), 98-124. https://doi.org/10.24844/em3301.04

Creswell, J. W. y Creswell, J. D. (2023). *Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approches* (6th Edn.). SAGE.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25.

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Gurdián-Fernández, A. (2007). *El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa*. Educativo Regional (IDER).

Guzmán Retamal, I., Pino-Fan, L. R. y Arredondo, E. H. (2020). Paradojas Didácticas Observadas en la Gestión de los Teoremas de Euclides. *Bolema*, *34*(67), 651-677. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a15

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408

Henríquez-Rivas, C., Guerrero-Ortiz, C. y Barrera, A. (2021a). Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea. *Educación Matemática*, *33*(3), 233-262. https://doi.org/10.24844/EM3303.09

Henríquez-Rivas, C. y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema*, *35*(71), 1550-1572. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo-Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021b). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak *et al.* (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. *Educación Matemática*, *35*(3), 178-208. https://doi.org/10.24844/EM3503.06

Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2024). Teachers' mathematical work based on examples presented in the teaching of algebra in secondary education. *Front. Educ.* *9*, 1346091. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1346091

Herbst, P., Cheah, U. H., Richard, P. R. y Keith, J. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs*. Springer.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses [The mathematical workspace and its genesis]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2018). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of geometric working spaces. En P. Herbst, U. Cheah, P. Richard y K. Jones (eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs* (pp. 5- 21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_2

Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces theoretical characteristics. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A. y Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical workspaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4I), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(6), 861-874. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Masselin, B. (2024). Strongly didactic contracts and mathematical work. Educational Studies in Mathematics, 115, 289-312. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1

Leavy, P. (2014). *The Oxford handbook of qualitative research*. Oxford University Press.

Menares-Espinoza, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En A. Kuzniak *et al.* (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 91-120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Montoya-Delgadillo, E. y Reyes-Avendaño, C. (2022). The Reference Mathematical Working Space. En A. Kuzniak *et al.* (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 73-90). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Erratum to: Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM – Mathematics Education*, *48*, 755. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0793-9

Nechache, A. y Gómez-Chacón, I. (2022). Methodological Aspects in the Theory of Mathematical Working Spaces. En A. Kuzniak *et al.* (eds.), *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 33-56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2

Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C. y Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *20*(6), em2450. https://doi.org/10.29333/ejmste/14588

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, *29*(4), 493-508. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0225-3

Ruslin, R., Mashuri, S., Rasak, M. S. A., Alhabsyi, F. y Syam, H. (2022). Semi-structured Interview: A methodological reflection on the development of a qualitative research instrument in educational studies. *IOSR - Journal of Research & Method in Education*, *12*(1), 22-29.

Salazar, J. V. F. (2018). Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. En N. Presmeg, L. Radford, W. M Roth y G. Kadunz (eds.), *Signs of Signification. ICME-13 Monographs* (pp. 217-233). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_12

Sunzuma, G. y Maharaj, A. (2020). In-service Secondary Teachers' Teaching Approaches and Views Towards Integrating Ethnomathematics Approaches into Geometry Teaching. *Bolema*, *34*(66), 22-39. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a02

Tachie, S. A. (2020). The Challenges of South African Teachers in Teaching Euclidean Geometry. International Journal of Learning. *Teaching and Educational Research*, *19*(8), 297-312. https://doi.org/10.26803/ijlter.19.8.16

Utsumi, S. (2016). Preschool teachers' practices of monitoring children to prevent health risks and facilitate adaptation: Multi-method triangulation in a qualitative study. *International Journal of Psychology*, *51*(special 1), 378-390.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). SAGE.

Zakaryan, D. y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, *33*(1), 71-97. https://doi.org/10.24844/em3301.03

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 19-05-24 | Aceptado: 10-10-24 | Publicado: 20-12-2024

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA A LA LUZ DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN GEOMETRÍA

ESTUDIOS

SIMILARITY OF TRIANGLES IN A HISTORICAL PERSPECTIVE IN THE LIGHT OF THE MATHEMATICAL WORKING SPACE IN GEOMETRY

KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS
Universidad de Macedonia Occidental
Florina, Grecia
knikolantonakis@uowm.gr
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-3836-0951

Resumen: La investigación actual indaga en un estudio realizado a 21 estudiantes de tercer grado de secundaria durante el año académico 2020-2021, centrándose en la unidad de enseñanza "Triángulos Semejantes". El enfoque pedagógico fue diseñado a través del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG). Para facilitar esta intervención, se utilizaron siete hojas de trabajo que incorporaban fuentes y problemas de la Historia de las Matemáticas, junto con una evaluación cognitiva conclusiva. Además, los estudiantes participaron en trabajos colaborativos en grupo, construyeron la herramienta histórica de Errard y la aplicaron para medir una distancia que de otro modo sería inaccesible. El objetivo era explorar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas dentro del marco del ETMG impacta en la comprensión de los triángulos semejantes por parte de los estudiantes. Después de un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, surgió que la integración de problemas históricos en la enseñanza estimuló el compromiso, fomentando una actitud positiva hacia el plan de estudios. Además, enriquecer el espacio de trabajo personal de los estudiantes les brindó la oportunidad de desarrollar una dimensión reflexiva en la resolución de problemas, un aspecto que no se aborda adecuadamente en las actividades estándar del libro de texto.

Palabras clave: Triángulos semejantes, espacio matemático de trabajo, problemas históricos, herramienta histórica, proporción, distancia inaccesible.

Abstract: The present study concerns research conducted with 21 students of the third grade of high school during the academic year 2020-2021 in the teaching unit "Similar Triangles". The design of the teaching intervention was carried out under the prism of the Mathematical Working Space for Geometry (MWSG). Seven worksheets with sources and problems from the History of Mathematics and a final cognitive test were used. Additionally, the students worked in groups, constructed the historical tool of Errard, and used it to measure an inaccessible distance. The aim was to study how the integration of the History of Mathematics, within the framework of the MWSG, affects the degree of understanding of the concept of similar triangles by the students. After the qualitative analysis of the students' responses, it was found that the integration of historical problems in teaching helped activate them, resulting in the creation of a positive climate towards the course requirements. Furthermore, the enrichment of the students' personal working space gave them the opportunity to cultivate a reflective dimension in problem-solving, something not supported by the activities of the school textbook.

Keywords: Similar triangles, mathematical working space, historical problems, historical tool, ratio, inaccessible distance.

1. Introducción

Piaget (1971) afirma que los niños tienen una percepción innata de la estabilidad de la forma de un objeto a pesar de los cambios en el tamaño de sus lados. De hecho, podemos encontrar la semejanza de formas en varias instancias de la vida cotidiana, por lo que los niños se familiarizan con ella desde temprano. Ampliar o reducir formas, diversas construcciones realizadas a escala, medir longitudes de distancias inaccesibles, o incluso la construcción de perspectiva utilizada por pintores o diseñadores para representar un objeto tridimensional en un plano son algunos ejemplos de aplicación del concepto de semejanza.

Sin embargo, también es un hecho que el concepto de semejanza de formas, especialmente triángulos, se considera difícil para los estudiantes en el tercer grado de la escuela secundaria. Muchas veces confunden la semejanza de triángulos con la igualdad y no comprenden su naturaleza dinámica, es decir, que mientras los ángulos permanecen constantes, los lados cambian en una proporción específica (Mastrogiannis y Kordaki, 2006).

Los estudiantes están familiarizados con el concepto de semejanza, ya que lo encuentran en muchos aspectos de su vida cotidiana. Sin embargo, cuando estudian formas semejantes en matemáticas se encuentran con importantes dificultades. A muchos alumnos les resulta difícil definir la semejanza de las formas (Mattheou y Spirou, 2009). Por supuesto, hay algunos alumnos que memorizan las relaciones entre los lados de formas semejantes sin comprender el concepto de semejanza (Mainali, 2018). Otro concepto erróneo sobre la semejanza es que se utiliza la misma razón de semejanza incluso cuando se hace referencia al *área* o al volumen de formas semejantes (Fernadez, 2019; Chazan, 1988). Por último, varios alumnos no comprenden el proceso de ampliación o reducción de una forma a otra semejante (Fernadez, 2019).

En cuanto a la comprensión del concepto de semejanza, específicamente en triángulos (Horoks, 2006), la literatura menciona diversas dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes. A ellos les resulta difícil identificar triángulos semejantes cuando la forma que tienen es exigente en términos del esfuerzo cognitivo que tienen que hacer (Ubah y Bannsilal, 2019; Poon y Wong, 2017). Además, muchas veces, el análisis de los estudiantes de la semejanza de dos triángulos basado en sus elementos principales parece ser más difícil que el análisis de la igualdad de triángulos (Parastuti *et al.*, 2018). Fernadez (2019) señala que los estudiantes utilizan criterios de semejanza erróneos. Asimismo, el concepto de razón de los lados de triángulos semejantes parece dificultar su aplicación por parte de los estudiantes, especialmente cuando los triángulos tienen un ángulo común. Otro error importante de los estudiantes sobre triángulos semejantes es el relacionado con el uso de estrategias aditivas en lugar de multiplicativas. Es decir, parece que los estudiantes asumen que al aumentar los lados de un triángulo en la misma longitud cada uno, el triángulo formado es similar al triángulo original (Chazan, 1988; Tsikopoulou y Ferentinos, 2018). Chazan (1988) menciona otra dificultad de los alumnos relacionada con el problema de encontrar proporciones correctas en triángulos rectángulos que tienen la altura formada por el ángulo recto.

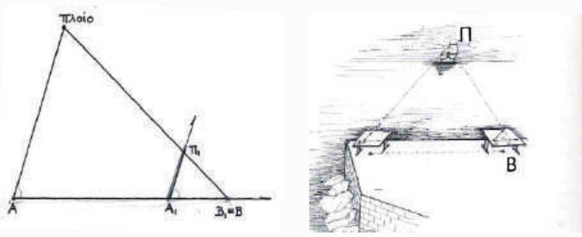
En este trabajo, se intentará abordar el concepto de semejanza de triángulos desde una perspectiva histórica. El objetivo es que los estudiantes comprendan el significado y la utilidad del concepto, así como comprender la estabilidad de la razón de los lados correspondientes de triángulos semejantes. Resolverán problemas históricos dentro del marco de la Geometría y construirán una herramienta de medición histórica para distancias inaccesibles a fin de experimentar esta particular propiedad por ellos mismos. El propósito es explorar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas dentro del marco del ETMG impacta la comprensión de los triángulos semejantes por parte de los estudiantes.

2. Revisión histórica del concepto de semejanza

La siguiente presentación de episodios en la historia de la aparición, desarrollo y aplicación del concepto de semejanza no pretende ser exhaustiva, sino que hace referencia a episodios concretos, la mayoría de los cuales se utilizaron en el diseño y aplicación en un aula de secundaria. Estos se refieren al uso de propiedades de la geometría euclidiana más que a otros enfoques geométricos y, por esta razón, no se hace referencia a los enfoques excepcionales de la geometría afín (y las transformaciones isométricas), las construcciones de Hilbert, etc.

Alrededor del 600 a. C., Tales de Mileto (624-547 a. C.) se ocupaba de varios temas geométricos. Se dice, entre otras cosas, que midió la distancia de un barco desde la costa utilizando la proporción de los lados de triángulos semejantes (Katz, 1998) (figura 1).

Figura 1. Tales de Mileto, medida de la distancia de un barco a la costa

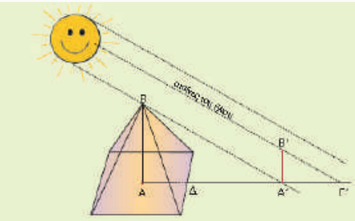


Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Para realizar esta medición, Tales tenía dos puntos de observación, A y B. Desde estos puntos, hizo dos observaciones hacia las direcciones A∏ y B∏, respectivamente. Luego, sobre la dirección AB, tomó la longitud A1B1=1/n AB y desde el punto A1 tomó el segmento A1∏1 paralelo a A∏. Así, los triángulos A∏B y A1∏1B1 son semejantes y, como pudo medir fácilmente la distancia A1∏1 en el plano, entonces debido a la razón constante de los lados, la distancia requerida A∏ sería nA1∏1.

También se atribuye a Tales la medición de la altura de una pirámide en Egipto con la ayuda de una vara y sus sombras. Así, como se muestra en el diagrama siguiente, Tales utilizó la igualdad de razones (AB/(A'B')=(AA')/(A'Γ')) que resulta de la semejanza de los triángulos ABA' y A'B'Γ' para medir la altura AB de la pirámide. En esta igualdad, la única magnitud desconocida es AB, ya que la longitud de la vara y las longitudes de los lados A'Γ' y AA' pueden medirse.

Figura 2. Medición de la altura de una pirámide por Tales de Mileto

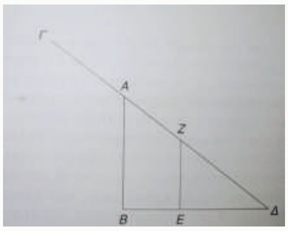


Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Sin embargo, quien sentó las bases sólidas de la teoría geométrica de la semejanza, presentada en el libro VI de los *Elementos* de Euclides, fue Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.). Eudoxo definió la razón igual y la proporción y, con su ayuda, demostró varios teoremas sobre proporciones que se encuentran en el libro V de los *Elementos* de Euclides. En este libro, Euclides dio la definición de razón como: "La razón es una relación de dos magnitudes homogéneas de igual o desigual calidad" (Katz, 2013). En el libro V, el matemático griego utiliza la razón de magnitudes, mientras que en el VII utiliza la razón numérica. La semejanza no se presenta como una transformación, sino que las figuras semejantes se muestran con una correlación de sus elementos de una manera "endosquemática", sin mostrar el carácter dinámico de la semejanza.

Otra obra de Euclides en la que se incluye la deducción de conclusiones basadas en las propiedades de las figuras semejantes es la *Óptica*, donde incluye varios resultados de medición indirecta. Por ejemplo, en una proposición que pide calcular la altura de una torre cuando se conoce su sombra, Euclides utiliza un objeto auxiliar de altura conocida y aplica las propiedades de la semejanza de triángulos. Cuando el sol está en Γ, quiere calcular la altura AB cuya sombra es BΔ. Para este propósito, coloca otro objeto de altura conocida cuya sombra también termina en Δ. Así, surgen dos triángulos semejantes ΔZE y ΔAB y, a partir de la igualdad de las razones de los lados homólogos, calcula la altura BA.

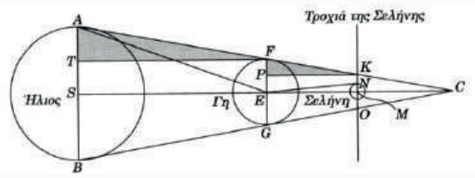
Figura 3. Medición de la altura a partir de la sombra, óptica de Euclides



Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Por la misma época, otro matemático y astrónomo, Aristarco de Samos (320-250 a. C.), utilizó el concepto de semejanza de triángulos para calcular las proporciones de las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol (Tsimbourakis, 2002). Demostró, usando algunas suposiciones arbitrarias, que el Sol está a diecinueve veces más distante de la Tierra que la Luna. Para esto, utilizó la semejanza de los triángulos ATF y FPK, así como del par ASE y ENM.

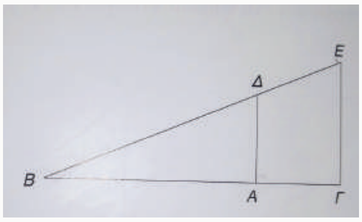
Figura 4. Calcular las proporciones de las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol, Aristarco de Samo



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

También se ocupó de mediciones indirectas de distancia y altura Herón de Alejandría (siglo I a. C.). En su obra *Sobre la Dióptrica* encontramos detalles en torno a las mediciones indirectas, en las que utiliza triángulos semejantes. Realizó cálculos para la altura de una torre, la determinación de la distancia entre dos puntos inaccesibles y la profundidad de un valle (Katz, 2013). En la figura 5 se muestra cómo Herón calcula la distancia entre un observador en A y un punto inaccesible B. Inicialmente elige un punto Γ de modo que sea colineal con A y B, y hace la perpendicular ΓE a ΓAB. Apuntando a B desde E, define un punto Δ en BE para que AΔ sea perpendicular a ΓAB. De los triángulos rectángulos semejantes formados, obtenemos: ΓE/AΔ = ΓB/BA, entonces ΓE/AΔ = (ΓA+BA)/BA, donde la única incógnita es la longitud requerida AB.

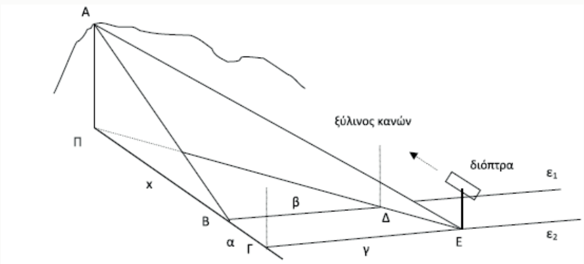
Figura 5. Calcula la distancia entre un observador y un punto inaccesible, Herón de Alejandría



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Un instrumento que se asemejaba mucho al dióptrico de Herón ya se utilizaba en los siglos III-II a. C., para medir con precisión distancias horizontales pequeñas y, con la ayuda de triángulos semejantes, encontrar distancias horizontales de gran longitud. Por ejemplo, en el siguiente esquema se solicita calcular la distancia horizontal B∏. Con el dióptrico colocado en el punto B, apuntamos al punto inaccesible A y trazamos la línea recta ∏-B-Γ. Entonces, la distancia BΓ se puede medir con la ayuda de la regla ya que es pequeña. Luego, con el dióptrico nuevamente en B, trazamos la dirección B-Δ perpendicular a ∏-B-Γ. Luego, movemos el dióptrico al punto Γ y de la misma manera trazamos la dirección Γ-E perpendicular a ∏-B-Γ. Después de medir las distancias BΔ y ΓE, con la ayuda de los triángulos rectángulos semejantes PBΔ y ∏ΓE, podemos calcular la distancia ∏B. Es decir: $x/\beta = (x+\alpha)/\gamma$, entonces $x = \alpha\beta/(\gamma-\beta)$.

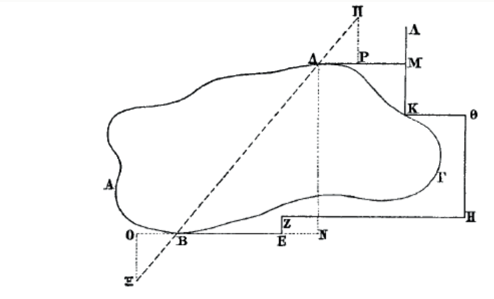
Figura 6. Cálculo de distancias horizontales largas, Herón de Alejandría



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Además, algo notable es que con reglas de madera se realizaban mediciones de distancias verticales y, en combinación con triángulos semejantes formados, se calculaban diferencias de altitud de gran tamaño. Otra construcción muy importante en la que se aplicaron las propiedades de los triángulos semejantes es la del acueducto de Samos, realizada por el arquitecto Eupalinos entre el 530 y 520 a. C. La excavación del túnel del acueducto se realizó simultáneamente desde ambos lados de la montaña y la pendiente debía ser constante. La dirección del túnel horizontal se determinó utilizando un dióptrico y la medición de su longitud se realizó con la ayuda de los triángulos semejantes formados (Tsimbourakis, 2002).

Figura 7. Apertura de acueducto de Samos, realizada por el arquitecto Eupalinos

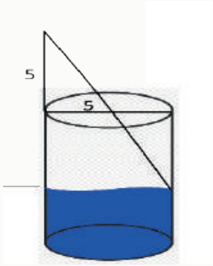


Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

Como se muestra en el esquema anterior, midiendo los segmentos rectos MK, ΘH y ZE se podía calcular la longitud de ΔN. De la misma manera, midiendo los segmentos BE y EN encontraron la longitud de BN. Así se formó un triángulo rectángulo ΔNB en el cual conocían la longitud de los dos lados perpendiculares. Luego, en la dirección de ΔM trazaron un segmento ΔP igual en longitud a BN y luego, perpendicularmente a esto, otro segmento recto igual en longitud a ΔN (usando la misma razón que usaron para ΔP), el ∏P. De esta manera, se creó el triángulo Δ∏P que era similar al triángulo ΔNB. Exactamente de la misma manera se creó el triángulo BOΞ, también similar a ΔNB. Pudiendo ahora medir la distancia Δ∏ o ΞB, usando la estabilidad de la relación de los lados de los triángulos semejantes, podían calcular la longitud del túnel BΔ. Además, para su trazado simultáneo desde ambos lados, se movieron en las direcciones Δ∏ y BΞ.

Después de varios años en China se escribió el primer tratado sobre matemáticas, para fines astronómicos y calendáricos. Este tratado se llamó *Clásico Matemático del Gnomon Zhou* y se escribió aproximadamente entre el 100 a. C. y el 100 d. C. Este trabajo contiene resultados relacionados con el teorema de Pitágoras, así como mediciones con varios instrumentos que, utilizando las propiedades de las proporciones de triángulos semejantes, determinan distancias inaccesibles (Loder, 2010). Un problema incluido en este libro es el cálculo de la profundidad de un pozo (midiendo desde la superficie del agua) con un diámetro conocido, y con la ayuda de elevar una vara en el borde del pozo (figura 8). Aquí se forman dos triángulos rectángulos semejantes y, a partir de la igualdad de las razones de los lados correspondientes, se calcula la profundidad del pozo (Katz, 2013).

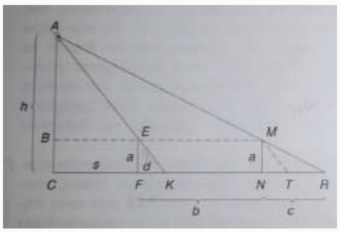
Figura 8. Cálculo de la profundidad de un pozo



Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Otro libro llamado *Los Nueve Capítulos del Arte Matemático* incluía 246 problemas con fracciones, el teorema de Pitágoras y problemas simples de medición. En el siglo III d. C., Liu Hui agregó un apéndice a este libro con problemas más complejos, que finalmente se convirtió en un trabajo matemático separado llamado *Manual Matemático del Mar* (Katz, 2013). Consiste en nueve problemas, uno de los cuales calcula la altura y la distancia de una isla, otro la altura de un árbol y el ancho de un río. Para resolver los problemas se utilizan cálculos basados en triángulos semejantes. En el primer problema de los nueve, se busca calcular la altura y la distancia de una isla. Como se muestra en la figura 9, para medir la altura se deben colocar dos postes de igual altura y con una distancia conocida entre ellos (MN = EF). Además, se deben realizar dos observaciones hacia A, una desde el punto K y otra desde el punto R. Así, los triángulos AEM y MTR son semejantes, al igual que los triángulos ABM y MNR. Entonces: ME/TR=AM/MR=AB/MN. Por lo tanto, AB=(ME·MN)/TR=(FN·EF)/TR, así que h=(FN·EF)/TR + EF.

Figura 9. Cálculo de la altura y la distancia de una isla

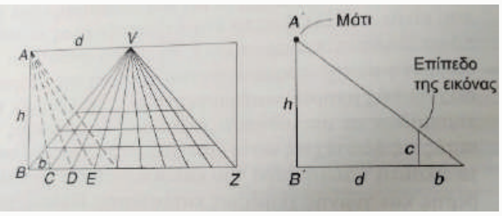


Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

El siguiente hito en el progreso histórico del concepto de semejanza es el período del Renacimiento con el desarrollo de la perspectiva. El primero en estudiar, en serio, la geometría de la perspectiva fue el artista italiano Filippo Brunelleschi (1377-1446). Sin embargo, el primer texto sobre este tema fue escrito por Leon Battista Alberti

(1404-1472). En su obra *Della Pittura* muestra cómo un conjunto de cuadrados en el suelo puede representarse en lienzo (figura 10). Alberti no proporciona ninguna prueba para esta construcción, pero para demostrarla es necesario el uso del concepto de triángulos semejantes (Katz, 2013).

Figura 10. Imagen de *Della Pittura*

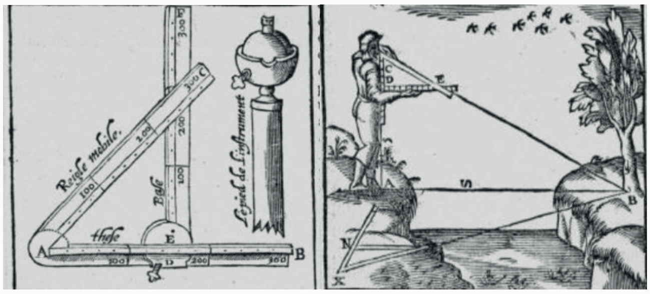


Fuente: elaboración a partir de Katz (2013).

Otro que también se ocupó de la perspectiva fue Piero de la Francesca (1420-1492), quien en su obra *De perspective pingendi* describe el diseño de objetos bidimensionales y tridimensionales con perspectiva focal. Durer (1471-1528), en su obra *Underweysung der Messung*, muestra cómo se aplican los principios geométricos en la representación de objetos en pintura.

Otro campo además del arte donde se usó el concepto de semejanza fue el de la construcción de instrumentos utilizados para observaciones con el fin de determinar distancias inaccesibles. Jean Errard de Bar-le-Duc (1554-1610), un ingeniero francés, publicó en 1594 la obra *La géométrie et pratique générale d'icelle*. En ella se describe la construcción de un instrumento para medir distancias inaccesibles, así como la manera de hacer mediciones en una superficie plana. La medición de distancias con este instrumento se realiza por medio de la semejanza de dos triángulos rectángulos (figura 11). Como se ve en las imágenes, al realizar la observación se forman dos triángulos rectángulos semejantes, uno del instrumento mismo y uno imaginario. A partir de la igualdad de las razones de los lados de los triángulos semejantes, podemos calcular la distancia inaccesible de la imagen.

Figura 11. Herramienta de Errard y medición de la distancia inaccesible



Fuente: elaboración a partir de Errard de Bar-le-Duc (1594).

Más tarde, a principios del siglo XVII, se publicaron obras que abrieron el camino hacia una visión proyectiva que fue estudiada por el arquitecto francés Gerard Desargues (1591-1661). En 1777, Euler fue el primero en definir el centro de semejanza, ya que en el contexto de la geometría de la perspectiva la semejanza se expresa mediante la proyección de una figura en otra. La semejanza ahora se manifiesta de manera funcional y adquiere el carácter de transformación.

3. La utilidad de la investigación

En esta investigación, el enfoque del concepto de semejanza de triángulos se realizó mediante la incorporación de la historia de las matemáticas en la enseñanza. Los estudiantes pudieron conocer la aplicación de la propiedad de la razón de los lados de triángulos semejantes en algunos aspectos de la actividad humana, y convencerse de la utilidad de su conocimiento. En el libro de texto escolar solo hay una breve mención al final de la unidad sobre la medición de la altura de la pirámide, a pesar de que en el programa analítico se sugiere presentar algunas obras técnicas importantes o mediciones de distancias en el período en que se utilizó la semejanza de triángulos.

Otro aspecto importante de esta investigación es que responde a uno de los objetivos generales del programa analítico para la enseñanza de las matemáticas, es decir, resaltar la aplicabilidad y el uso práctico de las matemáticas desde la antigüedad hasta nuestros días y su importancia como herramienta indispensable en las actividades humanas. En la intervención educativa se presentan problemas históricos de diversas épocas, lo que muestra la dimensión dinámica de la ciencia matemática y su evolución.

4. El propósito y las preguntas de investigación

Esta es una investigación sobre el diseño educativo y sus resultados serán analizados cualitativamente. Nos interesa investigar cómo responden los estudiantes y cómo piensan, más que cuántos de ellos responden correctamente. El objetivo es estudiar cómo la integración de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de los triángulos semejantes, dentro del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG), afecta el grado de comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Las preguntas de investigación que surgen son las siguientes:

¿Cómo abordan y aplican los estudiantes de Bachillerato el concepto de triángulos semejantes y el criterio de semejanza a problemas de origen histórico?

¿Cuáles son los movimientos de los estudiantes en su espacio personal de trabajo geométrico (génesis, nivel cognitivo y epistemológico, etc.) al construir el concepto de triángulos semejantes y aplicarlo a la resolución de problemas de origen histórico?

4.1 Muestra

En la investigación participaron veintiún estudiantes de tercer grado de secundaria. De ellos, once son chicas y diez son chicos. La muestra anterior es conveniente ya que forma parte del área que la investigadora enseña. La enseñanza, la construcción de la herramienta histórica y los experimentos tuvieron lugar en las instalaciones de la escuela, concretamente en el aula y el gimnasio. La intervención didáctica ocurrió durante la pandemia de COVID-19 y duró siete horas lectivas. Los alumnos ya habían trabajado el concepto de igualdad de triángulos y se les había enseñado en años anteriores el concepto de gnomon, razón (en especial numérica) y escala (principalmente en el contexto de la geografía, el estudio de mapas, etc.).

4.2 Herramientas de investigación

Los datos proceden de las respuestas de los alumnos a las preguntas y problemas de las siete hojas de ejercicios y del profesor durante el trabajo en grupo de los alumnos. Las hojas de trabajo fueron diseñadas bajo la perspectiva de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático para la Geometría (ETMG) para enriquecer el espacio de trabajo adecuado para los estudiantes y brindar la oportunidad de interacción entre los diferentes niveles (Kuzniak *et al*., 2016a; Kuzniak *et al*., 2016b). Además, en todas las hojas de trabajo se incorporaron problemas de la historia de las matemáticas relacionados con la semejanza de triángulos para investigar si esto influye en la comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Además, se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo con una fuente histórica auténtica en la que se basaron y construyeron una herramienta histórica de medición de distancias. Las actividades de la hoja de trabajo se diseñaron teniendo en cuenta el Modelo Matemático del Espacio de Trabajo en Geometría y, basándose en un análisis *a priori*, el diseño del movimiento potencial de todos los elementos, generadores y niveles de este modelo.

5. El Espacio de Trabajo Matemático Idóneo para la Geometría (ETMG) - Intervención docente

El primer trabajo práctico constaba de dos actividades en las que los estudiantes colaboraban en parejas. El objetivo de la primera actividad era establecer un marco de trabajo adecuado para que los estudiantes pudieran llegar a la definición de triángulos semejantes (las figuras rectilíneas semejantes son aquellas que tienen sus ángulos iguales y los lados de los ángulos iguales proporcionales. Criterio: en los triángulos equiángulos los lados sobre los ángulos iguales son proporcionales cuando los lados correspondientes son opuestos a los ángulos iguales). Para ello, se empleó un archivo GeoGebra (figura 12), relacionado con los ángulos y sus sombras, como herramienta para que los estudiantes avanzaran desde un nivel epistemológico hacia uno cognitivo y formalizaran el concepto mencionado.

Inicialmente, los estudiantes se adentraron en el nivel semiótico-discursivo, al ser desafiados a verificar la afirmación de Tales de que los ángulos múltiples tienen sombras múltiples, examinando el diagrama frente a ellos y un texto relevante sobre la conclusión anterior. Acto seguido, aprovechando la naturaleza dinámica del entorno de GeoGebra, calcularon la razón entre el ángulo alfa y su sombra, dos o más veces, trabajando así en la dimensión instrumental, y luego pasaron a la dimensión discursiva con la formulación de la definición de triángulos semejantes. Este proceso generó discusiones entre los estudiantes sobre sus resultados. Un diálogo representativo sobre las tres razones de los lados correspondientes de los triángulos la primera vez que los calcularon fue:

Mina: ¿Cuánto encontraron ustedes?

Tatiana: 1,3 en todos.

Mina: Nosotros 1,64. ¿Cuál es el correcto?

Tatiana: Dado que el XL está en una posición diferente... es lógico que encontremos algo diferente.

Mina: ¿Cuál es el correcto?

Profesora: ¿Qué dicen los demás? (Solo dos equipos habían llegado a este punto, así que respondieron).

Hero: Nosotros 1,68.

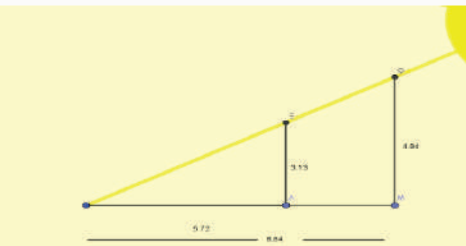
Nikos: Y nosotros 1,99 y en los tres lados igual.

Mina: Todos encontramos algo diferente, pero las tres razones son iguales cada vez.

Profesora: Muy bien, Mina... pero esperemos a que terminen los demás.

Siete de cada diez equipos realizaron correctamente el procedimiento y llegaron a la igualdad de las razones. Dos equipos de estudiantes no pudieron encontrar las tres razones iguales porque cometieron errores en los cálculos, pero lo descubrieron después de discutirlo con sus compañeros y lo corrigieron. Solo una pareja no pudo comenzar el experimento en absoluto en la dimensión instrumental. Parece que su trabajo en la dimensión semiótica no se completó con éxito porque les resultó difícil entender por qué debían calcular las razones de los lados.

Figura 12. Imagen de GeoGebra para calcular las razones



Fuente: elaboración propia.

El problema inicial de la primera actividad, respecto a la verificación de la afirmación de Tales, resultó bastante desafiante para los estudiantes. Solo cuatro de cada diez dieron la respuesta correcta. Una pareja respondió que "se deben calcular las sombras y las cotangentes", otra "en qué medida se multiplican las varillas", una tercera "encontrar las sombras", y tres parejas no respondieron en absoluto. Una de estas parejas es la que no completó las razones de las partes en la segunda tanda de la actividad. Aquí, los estudiantes no pudieron interpretar correctamente el texto inicial y combinarlo con el diagrama proporcionado en el archivo de trabajo. Es decir, no alcanzaron el resultado deseado en el proceso de génesis semiótica y luego tuvieron dificultades para pasar a la génesis discursiva y desarrollar un razonamiento correcto.

El objetivo de la segunda actividad era aclarar las diferencias entre triángulos iguales y semejantes, ya que muchas veces distinguen más fácilmente la igualdad que la semejanza (Parastuti *et al*., 2018). Por esta razón, se les pidió que construyeran, utilizando herramientas geométricas, un triángulo igual y otro similar a un triángulo dado, y que describieran cómo realizaron la construcción. En esta actividad, las herramientas geométricas se utilizaron como un medio para alcanzar el nivel cognitivo de la construcción de los triángulos. Trabajaron, es decir, inicialmente, en el nivel semiótico-instrumental y luego, para describir el proceso anterior, pasaron a la génesis discursiva, donde utilizaron las definiciones de triángulos semejantes e iguales para describir el curso que siguieron.

La mayoría de los alumnos se movieron con facilidad en el nivel semiótico-instrumental y construyeron los triángulos solicitados. De hecho, tres parejas de alumnos construyeron un triángulo semejante al dado pero con el doble de lados que el original, mientras que otras cuatro construyeron el triángulo solicitado con lados de la mitad del tamaño del original. Otras dos parejas utilizaron la suma en lugar de la multiplicación para construir un triángulo semejante al original, es decir, una construyó un triángulo con los lados aumentados en 2 cm y la otra empezó a construir un triángulo con los lados aumentados en 1 cm, pero no llegó a completarlo. Aquí vemos que estos alumnos no utilizaron la definición de triángulos semejantes como herramienta teórica para trabajar con éxito en el nivel instrumental-semiótico.

El paso de los alumnos a la génesis discursiva para describir el camino que siguieron en la construcción de las formas pareció todo un reto, con el resultado de que solo doce de ellos desarrollaron el silogismo apropiado. Tres de las parejas que consiguieron hacer los triángulos solicitados no describieron el proceso en absoluto porque tuvieron dificultades para encontrar las palabras adecuadas. Otra cosa digna de mención aquí es que dos de las parejas que respondieron a la pregunta de descripción desarrollaron una descripción muy breve. No escribieron detalladamente los pasos que siguieron, sino su forma general de proceder.

En la segunda hoja de trabajo se incluyeron dos actividades. El objetivo de la primera era clarificar a los estudiantes que en el concepto de semejanza de triángulos, lo importante es la constancia de la razón de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos correspondientes, no la posición relativa de los triángulos en el plano o el espacio. Se les pidió a los estudiantes que construyeran un par de triángulos semejantes en el plano y uno en el espacio, sin usar instrumentos geométricos. Tuvieron, pues, que utilizar la definición de triángulos semejantes como herramienta teórica y, moviéndose entre la génesis instrumental y semiótica, llegar al diseño de triángulos.

Después de discutir si los triángulos debían ser rectángulos o si uno debía estar contenido dentro del otro, trabajaron con éxito en la dimensión semiótica y todos dieron la forma requerida en el plano. Un diálogo característico fue:

Antonis: ¿Qué quieres decir con contenido?

Hero: Que uno esté dentro del otro... como los que tienen sombras.

Antonis: Esos eran rectángulos. ¿Aquí queremos construir rectángulos?

Tatiana: No solo rectángulos.

Profesora: Sí, no es necesario que sean rectángulos.

Hero: Ni que uno esté contenido dentro del otro.

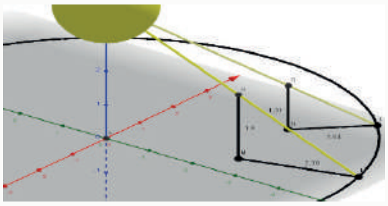
Antonis: Debe estar contenido para que parezca que uno es más grande.

Hero: Igual parecerá si los lados son dobles o triples.

Sin embargo, no ocurrió lo mismo con el diseño de triángulos semejantes en el espacio. Dado que los estudiantes no están familiarizados con formas en tres dimensiones, no pudieron imaginar la forma y completar la tarea en la dimensión semiótica. De hecho, hicieron preguntas como "¿qué quieres decir con en el espacio?", "¿no será lo mismo?" o "¿lo haremos tridimensional, entonces?". Solo dos estudiantes dibujaron con éxito el par requerido de triángulos semejantes.

En la segunda actividad, los estudiantes experimentaron nuevamente con un archivo GeoGebra 3D (figura 13), que utilizaron como herramienta para formular el criterio de semejanza de triángulos. Todos ellos, con facilidad, se movieron inicialmente en el plano nivel instrumental-semiótico, observando la constancia de la razón de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos correspondientes, y llegaron a la dimensión discursiva creando el criterio de semejanza.

Figura 13. Archivo GeoGebra 3D



Fuente: elaboración propia.

En la tercera hoja de trabajo, los estudiantes trabajaron en el conocido problema histórico de medir la altura de la pirámide de Tales (figura 2). Esta actividad tenía dos objetivos: por un lado, que los estudiantes comprendieran la utilidad del concepto de triángulos semejantes en la medición de distancias inaccesibles y, por otro, que aplicaran el criterio de semejanza que aprendieron junto con la igualdad de las razones de los lados homólogos de los triángulos semejantes.

Inicialmente, se pidió a los estudiantes que se movieran en el nivel semiótico-discursivo y describieran cómo logró medir Tales la altura de la pirámide. Luego, se les dieron algunas dimensiones y se les solicitó que calcularan la altura mencionada anteriormente. Todos ellos, utilizando como herramientas teóricas el criterio de semejanza y la igualdad de las razones de los lados homólogos, trabajaron con éxito en el nivel instrumental-semiótico y calcularon la altura de la pirámide. Sin embargo, solo once lograron pasar con éxito a la dimensión discursiva y describir el proceso que siguió Tales para medir la altura.

El resto tuvo dificultades en la dimensión discursiva. No lograron pasar de la génesis semiótica a la discursiva, sino que pasaron directamente a la instrumental. Les resultó más fácil aplicar la igualdad de las razones en el diagrama dado y calcular la altura solicitada. Consideraron que si realizaban los cálculos y calculaban la altura desconocida, entonces también responderían a la pregunta sobre la descripción del proceso.

En la cuarta hoja de trabajo, los estudiantes analizaron un fragmento del libro del ingeniero francés Jean Errard *La géométrie et pratique générale d'icelle*, sobre la construcción de un instrumento para medir distancias inaccesibles y cómo se realizaba la medición mencionada anteriormente. El objetivo era que los estudiantes reflexionaran sobre aspectos de la vida cotidiana, principalmente estudiando las fotografías del libro, en las cuales podría aplicarse el uso de un instrumento similar, y que también reflexionaran sobre su construcción. Por supuesto, el texto atrajo el interés de los estudiantes, quienes trabajaron con éxito en el nivel instrumental-semiótico, y después de comprender el fragmento, hicieron el diseño de un instrumento similar al descrito en él. Un diálogo característico es el siguiente que se refiere a la figura 14.

Figura 14. Página del libro de Errard con el instrumento para medir distancias inaccesibles


Soit donc la ligne A B, proposée à mesurer, sur l'extremité de laquelle A, ie tire orthogonelement, & en angle droict la ligne A C, laquelle ie mesure, & contient 5. pieds, sur laquelle & au long d'icelle ie mets la regle de la base (comme DE) laquelle base sera parallele à AB, *par la 28. du* 1. mais il faut que l'instrument soit mis en sorte qu'il y ait depuis C iusques à D, autant de petites mesures de l'instrument comme il y aura de pieds depuis C iusques à A. Ce faict, faut mouuoir la reigle mobile C E, iusques à ce que du ray visüel on puisse veoir par les pinnulles d'icelle, l'extremité B: alors ie dis que le petit triãgle CDE, est equiangle & proportionnel au grand A B C, *par la 4. du 6.* La ligne donc D E, coupant les costez du grand triãgle CA, & CB, aux poincts D, E, les couppe proportionnellement *par la 2. du 6.* Telle raison donc que CD a en DE, telle & semblable a C A, à A B. Or si C D contient 5. petites mesures & degrez, & ie trouue que D E en contient 10, ie concluray, que C A contenant 5.

Fuente: elaboración a partir de Errard de Bar-le-Duc (1594).

Profesora: ¿Y cómo dices que midieron la distancia en esta imagen que mencionas, Tatiana?

Antonis: Con el instrumento que sostiene.

Profesora: Sí, pero ¿cómo? ¿De qué manera?

Minas: Se forma un triángulo.

Hero: Son dos triángulos.

Profesora: ¿Qué triángulos son esos?

Johana: Rectángulos.

Profesora: Y entre ellos, ¿qué relación tienen?

Antonis: Uno está dentro del otro como los que hicimos con las sombras.

Hero: Son semejantes. Tienen el ángulo superior común.

Profesora: ¿Cómo nos ayuda esta conclusión?

Nikos: ¿Conocemos los lados en el triángulo pequeño?

Profesora: ¿Qué dicen? ………… Vuelve a leer la descripción del instrumento.

Evangelia: Sí, los conocemos porque es el instrumento …………, así que encontraremos las razones y encontraremos la distancia.

En la quinta hoja de trabajo se dieron a los alumnos instrucciones para la construcción de la herramienta de Errard con el objetivo de que las siguieran correctamente y activaran su creatividad para construirla. Los alumnos se dividieron en cinco grupos y trabajando con éxito la génesis instrumental consiguieron construir la herramienta (figura 15).

Figura 15. La construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Inmediatamente después, se les pidió a los estudiantes que midieran, utilizando la herramienta que habían construido, una altura inaccesible de su elección dentro del gimnasio de la escuela. Por supuesto, después de completar las mediciones, tenían que transferir la situación real al papel haciendo un dibujo que les ayudara a calcular la altura deseada. Sin embargo, los estudiantes tuvieron dificultades la primera vez para trabajar en la dimensión semiótica. La transición del espacio real al papel era imposible, por lo que no alcanzaron el nivel de visualización y, por lo tanto, no pudieron avanzar a la génesis discursiva. Aunque usaron la herramienta para visualizar, no pudieron recordar exactamente qué debían medir, como se ve en el siguiente diálogo:

Tatiana: Deberíamos tener dos triángulos… rectángulos.

Nikos: Sí, como en el libro… el francés.

Sócrates: Sí, pero allí el instrumento no se mostraba alto.

Profesora: Recuerden la última imagen, que dijimos que se parece a lo que vamos a hacer nosotros.

Hero: Oh, sí, recuerdo… entendido.

Hero: Primero haremos el triángulo desde el instrumento…

Minas: Y luego el grande… donde mira.

Así, se les dio tiempo a los estudiantes para revisar en clase la herramienta que habían construido y, sobre todo, recordar cómo medir una altura inaccesible antes de regresar al gimnasio. La segunda vez, realizaron correctamente las mediciones con la herramienta y hubo satisfacción con el resultado. Pasaron de la génesis instrumental a la semiótica sin ningún problema particular, ya que consiguieron trasladar la situación real a una forma sobre el papel. A continuación, justificaron con éxito la semejanza de los triángulos usando el criterio de semejanza e inmediatamente pasaron al nivel instrumental-discursivo utilizando la relación de lados homólogos como herramienta teórica para calcular la altura requerida.

En el último ejercicio, se incluyeron tres problemas históricos. El objetivo aquí era que los estudiantes practicaran la aplicación del criterio de semejanza y la relación de proporcionalidad de los lados. Además, debían comprender la importancia del concepto de triángulos semejantes en la vida cotidiana de personas de diferentes culturas y períodos de tiempo.

El primer problema se refería a la medición de la distancia de un barco desde el puerto, realizado por Tales (figura 1).

En la primera pregunta sobre la descripción de la resolución del problema, solo la mitad de los estudiantes respondieron correctamente. Pasaron con facilidad a la génesis semiótica-discursiva y utilizando el criterio de semejanza justificaron, a través de la semejanza de los triángulos, el cálculo de la distancia solicitada. Cuatro estudiantes describieron correctamente el procedimiento que siguió Tales, pero para demostrar que los triángulos del esquema eran semejantes, simplemente dijeron que “parece que uno es una ampliación del otro”. Aquí vemos que comprendieron el esquema, pero tuvieron dificultades para dar una justificación verbal correcta basada en la teoría. Su transición a la génesis discursiva fue fallida. Un estudiante incluso respondió que un triángulo tendría lados dobles o triples que el otro, lo que muestra que entendió la relación de proporcionalidad de los lados, pero no pudo aplicar el criterio de semejanza.

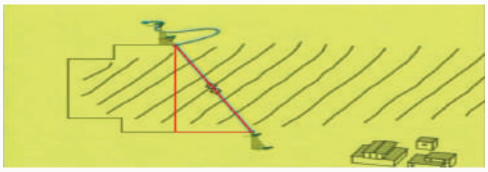
En la segunda pregunta, donde tenían que calcular la distancia por sí mismos, diecisiete de los veintiún estudiantes midieron el segmento A1B con una regla y luego escribieron la relación de proporcionalidad entre los lados y encontraron la longitud desconocida. Es decir, pudieron usar la regla y la relación de proporcionalidad de los lados como herramientas para trabajar con éxito en la génesis instrumental-semiótica.

Los tres estudiantes que no resolvieron correctamente el problema tuvieron dificultades para entender qué segmentos rectilíneos deberían medir por sí mismos, por lo que solo midieron la distancia AΠ y dieron esa medición como respuesta. El último no pudo escribir la igualdad de razones correcta debido a esto. Estos cuatro estudiantes no pudieron moverse exitosamente en la génesis instrumental, ya que tuvieron dificultades para usar adecuadamente las herramientas que los guiarían hacia la respuesta.

El segundo problema se refería a la medición de la profundidad de un pozo, en uno de los problemas de medición de tierras incluidos en el libro chino *Jiuzhang suanshu* (Katz, 2013). Aquí, los estudiantes no tuvieron dificultades. Veinte de veintiuno escribieron correctamente la igualdad de razones y calcularon la distancia. Pasaron fácilmente a la génesis semiótica-discursiva y, tras explicar la semejanza de los triángulos, utilizaron la relación de proporción como herramienta y dieron la respuesta correcta.

En el tercer problema, los estudiantes inicialmente vieron un video sobre el túnel de Eupalinos (figura 16) y luego respondieron las preguntas del ejercicio. En la primera pregunta, relacionada con la necesidad de construir el túnel, todos respondieron correctamente. En la segunda pregunta, sobre cómo Eupalinos midió la longitud del túnel, diecisiete estudiantes describieron correctamente el método de cálculo. Utilizando el vídeo como herramienta digital, pasaron de la génesis instrumental a la génesis discursiva y, usando el criterio de semejanza, explicaron cómo Eupalin encontró la longitud del túnel. Dos estudiantes no contestaron en absoluto, y los otros dos respondieron que utilizaron los triángulos semejantes del esquema. Estas respuestas muestran que los estudiantes tuvieron dificultades para desarrollar un razonamiento basado en la teoría correspondiente.

Figura 16. El túnel de Eupalinos



Fuente: elaboración a partir de Tsibourakis (2002).

6. En lugar de epílogo

En la intervención didáctica anterior, el diseño de las actividades se basó en los principios del ETM de geometría. Las actividades, que constituían el ETM idóneo de los alumnos, se desarrollaron para pasar por las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. La interacción entre los niveles verticales, creada por las génesis anteriores, enriqueció el ETM personal de los alumnos y les ayudó a resolver los problemas geométricos relacionados con la semejanza de triángulos y la comprensión conceptual de la semejanza. En algunas actividades, el espacio en el que trabajaron los alumnos fue GI, mientras que en otras fue GII o incluso una combinación de los ejemplos geométricos anteriores (GI, GII).

A partir de la "lectura" de los espacios personales de trabajo de los alumnos y respondiendo a la pregunta de investigación, diríamos que los alumnos respondieron bien a los requerimientos de las actividades. En la mayoría de las preguntas trabajaron con éxito superando los niveles verticales del ETM. Por supuesto, hubo algunos casos en los que tuvieron dificultades, por ejemplo, al trasladar la medida de una altura inaccesible, con la herramienta de Errard, al papel o al dibujar dos triángulos idénticos en el espacio, en los que su trabajo en la génesis semiótica no tuvo éxito. En estos casos necesitaron más tiempo para poder comprender la forma y construirla. Otra cosa a destacar, es que varios alumnos fallaron en la parte de las actividades que requerían avanzar hacia la génesis discursiva. Por supuesto, es cierto que las preguntas que exigen a los alumnos desarrollar razonamientos son nuevas para ellos, ya que la mayoría de las actividades del libro de texto se agotan en el nivel instrumental-semiótico.

7. Referencias bibliográficas

Chazan, D. (1988). Similarity: Exploring the Understanding of a Geometric Concept. Technical Report 88-15. Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.

Errard de Bar-le-Duc (1594). *La géométrie et practique générale d'icelle*. Paris.

Fernández, A. T. y Villanueva, M. S. (s. f.). Mejora de una unidad didáctica: semejanza geométrica. EN 2o ESO. 78.

Horoks, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages – Etude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Katz, V. (2013). *History of Mathematics. An Introduction*. University of Crete Editions.

Keepek (2001). *Euclid The Elements*. Vol. 1. Athens.

Kospentaris, G. y Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity proportions and the educational experience. Mediterranean Congress, Palermo, 239-255.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016a). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721-737. DOI: 10.1007/s11858-016-0812-x

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 861-874. DOI: 10.1007/s11858-016-0773-0

Lodder, J. (2010). Proportionality in Similar triangles: A Cross – Cultural Comparison – References. *Convergence*. Mathematical Association of America.

Mainali, B. (2018). Exploring similarity Using anglegs and Geogebra. *Wisconsin teacher of Mathematics. Issue 2.*

Mastrogiannis, A. y Kordaki, M. (2006). The concept of similarity in triangles within the context of tools of Cabri-Geometry II. En *Proceedings of 4rth Int. Conf. m-ICTE2006* (pp. 641-645). Seville, Spain.

Mattheou, K. y Spyrou, P. (2009). The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: how the concept of similarity and intuitive knowledge affect student's perception of similar shapes. En *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 736-746). Lyon, France.

Parastuti, R. H., Usodo, B. y Subanti, S. (2018). Student's Error in Writing Mathematical Problem Solving Associated with Corresponding Angles of The Similar Triangles. *Pancaran Pendidikan FKIP*, 7, 186-193. DOI:10.25037/pancaran.v7i1.149

Piaget, J. y Inhelder, B. (1971). The Child's Conception of Space. Routledge & Kegan Paul, London.

Poon, K. K. y Wong, K. L. (2017). Pre-constructed dynamic geometry materials in the classroom – how do they facilitate the learning of 'Similar Triangles'? *International. Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *48*, 735-755. DOI: 10.1080/0020739X.2016.1264636

Tsibourakis, D. (2002). *Mathematical measurements in Ancient Greece*. Edition Eolos.

Tsikopoulou, S. y Ferentinos, S. (2018). There are mistakes in mathematics that are almost impossible for students to avoid. *Research, Review of Educational - Scientific Issues*, *14*, 32-47.

Ubah, I. y Bansilal, S. (2019). The use of semiotic representations in reasoning about similar triangles in Euclidean geometry. *Pythagoras*, *40*(1), a480. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v40i1.480

Vollrath, H. J. (1977). The understanding of similarity and shape in classifying tests. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 211-224. https://doi.org/10.1007/BF00241026

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 04-06-24 | Aceptado: 25-09-24 | Publicado: 20-12-2024

LA COMPRENSIÓN DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM) EN BASE SEIS POR PARTE DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA Y SU INFLUENCIA EN EL ETM EN BASE DIEZ

THE UNDERSTANDING OF A MATHEMATICAL WORKING SPACE (MWS) IN BASE SIX BY FUTURE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS AND ITS INFLUENCE ON THE MWS IN BASE TEN

ESTUDIO

FLORENCE PETEERS
CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ. Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ. Rouen, LDAR,
París, Francia
florence.peteers@cyu.fr
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9517-7076

NORMA SEGURA-CORELLA
Université Paris Cité y Universidad de Costa Rica
París, Francia
norma.segura@ucr.cr.cr
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-0707-7219

LAURENT VIVIER
Université Paris Cité, Univ. Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, LDAR
París, Francia
laurent.vivier@u-paris.fr
ORCID: 0000-0002-9203-8756

Resumen

En el dominio matemático de los números la base diez juega un rol importante en la escolaridad primaria y secundaria, aunque no es absoluta del punto de vista matemático. Sin embargo, la mayoría de personas interpretan este rol como absoluto, obteniendo lo que se interpreta como un paradigma común o degenerado donde el número se confunde con su representación en base diez. Este artículo reporta los hallazgos de una experiencia con futuros profesores de primaria, en tercer año de licenciatura en Francia. Se propone una secuencia que permite construir un ETM para desarrollar el conocimiento de los números utilizando la base seis como sistema de representación, en paralelo del ETM en base diez. Se presenta el análisis de la circulación del trabajo matemático de los estudiantes, abordando diferentes aspectos de los números a través de las tres génesis. El estudio revela el establecimiento de un nuevo sistema de representación, la base seis, como un agente transformador del paradigma común tomando conciencia del papel no absoluto de la base diez.

Palabras clave: ETM, bases numéricas, paradigma, números, formación de profesores.

Abstract

In the mathematical domain of numbers, base ten plays an important role in primary and secondary schooling, although it is not absolute from the mathematical point of view. However, most people interpret this role as absolute, obtaining what is interpreted as a common or degenerate paradigm where the number is confused with its representation in base ten. This article reports the findings of an experience with future primary school teachers, in the third year of their bachelor's degree in France. A sequence is proposed to build an ETM to develop the knowledge of numbers using base six as a representation system, in parallel to the ETM in base ten. The analysis of the circulation of the mathematical work by students is presented, approaching different aspects of numbers through the three genesis. The study reveals the establishment of a new representation system, the base six, as a transforming agent of the common paradigm becoming aware of the non-absolute role of base ten.

Keywords: ETM, numerical bases, paradigm, numbers, teacher training.

1. Introducción

Los números y sus operaciones constituyen una parte importante de las matemáticas escolares, docentes y estudiantes dedican años a la enseñanza y aprendizaje del sistema decimal. Por ejemplo, en Francia los niños de 7 a 9 años "étudient différentes manières de désigner les nombres, notamment leurs écritures en chiffres, leurs noms à l'oral, les compositions-décompositions fondées sur les propriétés numériques (le double de, la moitié de, etc.), ainsi que les décompositions en unités de numération (unités, dizaines, etc.)" [estudian distintas formas de expresar los números, incluyendo su escritura en numerales, su denominación oral, la composición-descomposición basada en propiedades numéricas (el doble de, la mitad de, etc.) y la descomposición en unidades de numeración (unidades, decenas, etc.)] (Ministerio de la Educación Nacional y de la Juventud, 2024). Se trata de un dominio matemático complejo, cuyas técnicas son dominadas relativamente bien por los profesores, ya sean titulados o en formación. Sin embargo, se plantea la cuestión de la comprensión, sobre todo porque la mayoría de los profesores no tienen formación científica (y menos aún matemática) y algunos han tenido dificultades para aprender matemáticas en su formación básica.

Los estudios llevados a cabo en Francia (por ejemplo, Chambris [2010] y Tempier [2018, 2010]) constatan las dificultades que representa el aprendizaje y la compresión del sistema numérico que se utiliza actualmente y su operacionalización. Anselmo y Zucchetta (2013) vinculan tales dificultades con el uso de métodos clásicos de enseñanza, centrados en la mecanización de algoritmos y reglas. Tempier (2010), a partir de un análisis del sistema educativo francés, subraya la importancia de proporcionar a los profesores recursos que les ayuden a comprender los conceptos esenciales de la numeración decimal para gestionar eficazmente los errores y dificultades vinculados con reconocer, comprender y operar con agrupaciones.

¿Cómo aprenden y comprenden los maestros el sistema de numeración decimal? En general, los maestros desarrollan una comprensión del sistema numérico decimal no científica, a menudo con una relación frágil y conflictiva con las matemáticas, mediante una sucesión de símbolos aprendida de memoria y que está regida por ciertas reglas y algoritmos. La dificultad de la formación radica en que, por lo general, los profesores en formación no consideran necesario profundizar en el sistema decimal, ya que sus conocimientos técnicos son suficientes para resolver problemas. Sin embargo, esta comprensión es importante para la enseñanza, de modo que no se limite a aplicar las técnicas a signos numéricos. Con ello, se plantea la siguiente idea en forma de pregunta: ¿la construcción de un sistema numérico en base seis[1] podría mejorar tal compresión? A partir de este cuestionamiento surge la hipótesis principal que rige esta investigación:

> El estudio de un sistema numérico con base distinta de diez aumentará la comprensión del sistema numérico decimal. Específicamente, al utilizar notaciones, símbolos, denominaciones, conceptos y reglas conocidos o nuevos para establecer un nuevo registro de representación de los números, emergen las relaciones y los orígenes del sistema decimal.

El objetivo general de esta investigación es estudiar el efecto que la construcción de un sistema numérico en base seis tiene sobre la comprensión y operacionalización del consolidado sistema en base diez, en estudiantes de tercer año de licenciatura de la Universidad Paris Cité. Para ello, se desarrollan y analizan los dos sistemas, en base seis y diez, tomando en cuenta los signos, las técnicas y los conocimientos. Es decir, se interpretan los dos sistemas como dos espacios de trabajo matemático (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022).

En la siguiente sección presentamos el marco teórico de los espacios de trabajo matemático que permite, en la sección 3, precisar la noción de comprensión y el objetivo de la investigación. En la parte 4, sobre la metodología, se detalla la ingeniería didáctica que fue diseñada, enfoncándose en la primera sesión de la implementación que se estudia en este artículo. Las secciones 5 y 6 están dedicadas al análisis, *a priori* y *a posteriori*, donde se caracteriza el trabajo de los tres grupos de estudiantes. Antes de la conclusión, la sección 7 expone una discusión en torno a la noción de paradigma en el marco del dominio numérico, enfatizando elementos clave.

2. Marco teórico

En esta sección se expone un breve resumen de los elementos teóricos de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) que fundamentan el análisis de los datos. No se trata de una presentación detallada de la teoría; para entrar en su estudio profundo, véase Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard (2022).

---

1 La elección de la base seis se fundamenta en varias razones, entre las que destacan dos: 1) una base superior a diez supone una gran dificultad cognitiva para este público no científico; 2) seis es el único número inferior a diez que tiene dos divisores propios primos, como el diez, por lo que las dos bases tienen las mismas propiedades aritméticas.

2.1 Marco general del ETM

La teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se interesa por el estudio del *trabajo matemático* (TM), ya sea el esperado por una institución (TM de referencia) o el realizado por un individuo (TM personal). "Le travail mathématique est conçu comme un processus humain et intellectuel productif, dont l'orientation et la finalité sont définies et soutenues par les mathématiques et plus généralement par la culture mathématique" [El trabajo matemático se concibe como un proceso humano e intelectual productivo, cuya dirección y finalidad están definidas y apoyadas por las matemáticas y, más ampliamente, por la cultura matemática] (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022, p. 57).

Para una institución o un individuo, el conjunto organizado de saberes y conocimientos que pueden utilizarse para producir un TM se denomina Espacio de Trabajo Matemático (ETM), de referencia o personal. El papel del profesor consiste en construir un ETM, denominado idóneo, para que los estudiantes realicen cierto TM con el objetivo de desarrollar su ETM personal hacia el espacio de trabajo de referencia (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier, 2024).

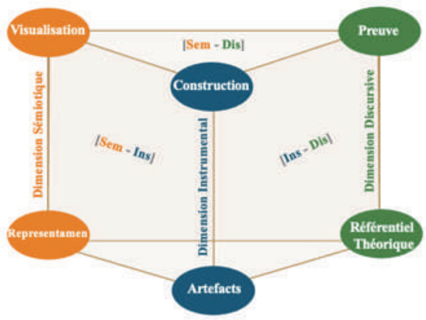
2.2 Los componentes del trabajo matemático

La teoría modeliza estos ETM mediante tres componentes de naturaleza epistemológica —representamen, artefacto y referencial teórico— y tres procesos cognitivos —visualización, construcción y prueba— que se representan mediante los planos epistemológico y cognitivo. Siguiendo a Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard (2022), examinar el desarrollo del trabajo matemático significa observar el proceso de articulación entre estos planos; su evolución puede analizarse mediante tres génesis o dimensiones: la semiótica, la instrumental y la discursiva.

- La génesis semiótica confiere a los signos su estatuto de objetos matemáticos operativos.
- La génesis instrumental operacionaliza los objetos materiales que tienen intencionalmente un uso determinado.
- La génesis discursiva da sentido a definiciones, teoremas y propiedades en el marco de un discurso deductivo y lógico.

El siguiente diagrama proporciona una representación visual de esta organización, ofreciendo una visión global que ayuda a reflexionar en el marco de esta teoría.

Figura 1. Representación de modelo ETM



Fuente: elaboración propia.

2.3 La noción de paradigma

La teoría introduce también la noción de paradigma que, siguiendo a Kuhn (1971), es un conjunto de técnicas y valores que comparte un grupo en un contexto científico. La teoría de ETM adapta esta noción a las matemáticas en un contexto escolar. En particular, para cada dominio matemático, un paradigma define la forma en que se plantean las tareas que hay que realizar y los problemas que hay que resolver, mediante la realización de una determinada tarea matemática que luego puede ser evaluada. Contrariamente a Kuhn (1971), los paradigmas en la teoría de ETM pueden coexistir y su articulación es a menudo importante para la calidad del trabajo realizado. Además, los paradigmas no son necesariamente explícitos; constituyen una herramienta para que el investigador caracterice el trabajo matemático.

2.4 La comprensión en el marco de la teoría de ETM

Con estos elementos de la teoría ETM, se puede abordar la cuestión de la comprensión, central en la pregunta de esta investigación. López y Vivier (2022) interpretan la expresión “making sense” en términos de conexiones entre los elementos de la ETM y más concretamente identificando el necesario enriquecimiento del trabajo rutinario [sem-ins] con la dimensión discursiva durante una tarea en la que las rutinas son ineficaces. Además, estos autores destacan la importancia de las articulaciones entre paradigmas.

Cabrera, Montoya, Vandebrouck y Vivier (2024) van más allá al proponer la idea de trabajo conceptualizado. Se trata de un trabajo completo y coherente acompañado de un discurso verbalizado que atestigua la conexión entre los conocimientos.

3. Objetivos e hipótesis de investigación

A partir de la presentación teórica precedente se reformula y especifica, en el marco de la teoría de los ETM, la hipótesis de investigación planteada en la primera sección.

1. Los ETM personales de los futuros profesores de primaria son suficientemente eficaces para resolver tareas en base diez, pero su trabajo es esencialmente semiótico-instrumental y el aspecto discursivo se ha desarrollado poco. En consecuencia, estos profesores no identifican la necesidad de entender mejor el funcionamiento de la base diez, con una génesis discursiva, con el objetivo de enseñar el sistema decimal. Incluso podría decirse que, para estos sujetos de estudio, un número se confunde en gran medida con su forma numérica cifrada en base diez.
2. El trabajo en una base diferente a diez posibilita la eclosión de nuevos ETM con el desarrollo necesario de las tres dimensiones, dando lugar a un trabajo completo y coherente.
3. Si este trabajo genera conexiones entre diferentes tipos de conocimiento, o articulaciones entre paradigmas, proporciona una comprensión del ETM para la nueva base.
4. Esta comprensión del ETM de la nueva base conduce a una mejor comprensión del ETM de la base diez, por lo que la nueva base debe ser suficientemente similar y diferente al mismo tiempo.

En este artículo se discuten y validan las hipótesis 2 y 3. La hipótesis 1 sigue siendo una hipótesis de trabajo razonable a la luz de experiencias precedentes. La hipótesis 4, la central, es más delicada a validar y requiere una metodología específica: la investigación continua. El análisis de los trabajos matemáticos permitirá validar la hipótesis 2 y, si se identifica un trabajo matemático conceptualizado, se podrá validar la hipótesis 3.

4. Metodología

Este artículo se inscribe en una investigación cualitativa, mediante un estudio de caso presenta el análisis de una Ingeniería Didáctica (ID) implementada durante el segundo semestre del 2024, en el marco de la formación inicial de maestros en Francia.

4.1 Una Ingeniería Didáctica

La ID es una metodología de investigación cuyo objetivo es establecer condiciones experimentales para responder a una pregunta de investigación. Requiere el desarrollo de una situación didáctica en la que la puesta en práctica experimental permite recoger datos que, comparados con un análisis *a priori*, proporcionan una respuesta al problema didáctico planteado. Frecuentemente, esta respuesta es parcial, lo que data a la ID de un carácter cíclico: los análisis *a posteriori* conducen a cambios en la situación didáctica, que debe volver a ponerse a prueba experimentalmente.

Artigue (1988, pp. 287-298) distingue cuatro fases en una ID:

1. Análisis preliminares.
2. Diseño y análisis *a priori*.
3. Experimentación.
4. Análisis *a posteriori* y validación.

Desde 2013, se han llevado a cabo varios ciclos de esta ID, basados en los análisis previos de los estudios de doctorado de Chambris (2008) y Tempier (2013) para la base diez y de Nikolantonakis y Vivier (2013, 2016) para bases distintas de diez. Por ejemplo, la segunda experimentación, en 2014, se centró en la base seis, como resultado de la retroalimentación inicial tras la experimentación de 2013, que fue en ese momento en base siete. Ahora, esta situación didáctica en conjunto es robusta porque, desde 2019, se ha mantenido relativamente estable con resultados similares y coherentes. Así, se tiene una secuencia de ocho sesiones que forman parte de un ETM idóneo, producto de la evolución y adaptación de ETM idóneos estudiados en investigaciones anteriores (Peteers y Vivier, 2022, 2023):

Tabla 1. Descripción de las sesiones que conforman el ETM idóneo

Sesión	Contenido
Sesión 1	Numeración escrita y oral en el sistema de numeración en base seis, codificación, carácter ordinal y cardinal, unidades relativas, primeras sumas.
Sesión 2 y 3	Suma y resta (tablas de sumar), multiplicación y división (tablas de multiplicar), técnicas operatorias (del mismo tipo que las de base diez utilizadas en Francia).
Sesión 4	Medida de longitudes, perímetro, lados de polígonos, sistema secimétrico, subunidades, nuevos números (racionales, raíces cuadradas) y nuevas formas de escritura (coma, fracción).
Sesión 5, 6 y 7	Medida de áreas, regla graduada, el círculo, π (conversión autorizada de 3,14 a base diez) y cálculos automatizados.
Sesión 8	Síntesis final.

Fuente: elaboración propia.

En cada tarea de la secuencia se establecieron variables didácticas específicas en función de los objetivos y resultados de las experimentaciones anteriores. Sin embargo, hay dos variables didácticas globales que pilotean este ETM idóneo: el uso de símbolos arábigos para representar los números y la restricción de cualquier referencia explícita a la base diez y, en particular, el vocabulario y los instrumentos físicos (calculadora, regla graduada, software, etc.) vinculados con el sistema decimal. Claramente, los estudiantes son libres de reflexionar usando sus conocimientos previos en base diez, propios de sus ETM personales en el sistema decimal, pero esta debe ser una reflexión interna del individuo.

4.2 Contexto de investigación

En este artículo se presenta el estudio de la Sesión 1 que se llevó a cabo durante el segundo semestre del año lectivo 2023-2024, en la Universidad Paris Cité, con un grupo de 11 futuros profesores de primaria de tercer año de licenciatura. En particular, esta primera sesión está constituida por seis partes:

a. Introduce el sucesor de un número en el sistema de numeración en base seis, haciendo énfasis en el carácter ordinal de los números.
b. Introduce la cardinalidad en este nuevo sistema de numeración.
c. Establece el valor posicional y las unidades relativas.
d. Introduce la adición de dos números representados en base seis.
e. Mecaniza las conversiones entre unidades de numeración.
f. Institucionaliza lo estudiado durante esta sesión.

El momento de clase se desarrolló en tres momentos, primero un trabajo individual sobre la tarea A1, seguido de una discusión de las producciones en subgrupos de 3 o 4 estudiantes. Se constituyeron tres subgrupos de trabajo (ESJL, MASC y VAL) que continuaron el trabajo hasta la parte F. Al final, se desarrolló una puesta en común del trabajo de los tres grupos guiada por el formador.

4.3 Recolección y análisis de los datos

Para describir la circulación del trabajo matemático de esta selección de estudiantes, se recolectaron datos de distinta naturaleza. Se grabó el audio y video de la Sesión 1 mediante una cámara fija ubicada en uno de los laterales del salón de clase, se recolectaron todas las producciones escritas de los estudiantes, así como las valoraciones de tres observadores activos (los tres investigadores); uno de los investigadores es también el formador.

El análisis de estos datos se desarrolló en tres niveles, aplicando algunas herramientas que proporciona la teoría de ETM. En un primer nivel, se exploraron las dimensiones semiótica, instrumental y discursiva mediante una tabla en la que se identificaron, para cada grupo de estudiantes (MASC, ESJL y VAL), los elementos de cada dimensión a partir de las producciones escritas y notas de los observadores.

La triangulación de estos elementos se desarrolló en un segundo nivel de análisis, que se complementó con los datos audiovisuales recolectados, obteniendo la circulación de trabajo matemático en los diversos planos verticales. Con ello, se obtuvo una síntesis del trabajo de cada grupo. El objetivo de tal síntesis es identificar el tipo de trabajo realizado por cada grupo y, en particular, las fases en las que se puede identificar el trabajo conceptualizado.

Este trabajo de interpretación se enriquece en un tercer nivel de análisis, con la identificación de elementos que podrían ser parte del paradigma (sujetos a transformación o no) después del trabajo en este ETM idóneo: significados en torno al símbolo, número, cifra, unidad, exploración del valor posicional y representación de números. Partiendo de la hipótesis —*un número es igual a su forma en base diez*—, es un elemento clave de un paradigma ampliamente compartido por los futuros profesores de primaria.

5. Análisis *a priori* de la Sesión 1

En la parte A se pide primero que completen la secuencia de números, de uno en uno, en una tabla que muestra los números del 1 al 42 en base seis, y después que expliquen cómo encontrar la escritura numérica del sucesor de un número en este sistema. Se espera que los estudiantes completen la tabla utilizando sus conocimientos de la base diez. Es posible que aparezcan las secuencias 43-44-45-46, pero las experiencias anteriores demuestran que no es muy frecuente que los dígitos 6, 7, 8 y 9 de base diez aparezcan en el dígito de la unidad, al menos en los primeros números.

Por otro lado, se espera ver 45-50-51…55-60…65-70, etc. (casi sistemático), lo que evita la introducción de un tercer dígito en el número, demostrando una comprensión del sistema ordinal en base seis. En ese caso, se prevé una retroalimentación, que puede ser una puesta en común de los resultados, para mostrar la introducción de signos externos al sistema y un recordatorio de las restricciones en torno a la base diez.

También se esperan, al inicio, explicaciones del tipo "+1" para obtener el sucesor, excepto cuando el dígito de la derecha es 5, en cuyo caso se procede a "+5", lo que demuestra una vez más la preponderancia del ETM en base diez. Tras la retroalimentación, se anticipa una buena comprensión del algoritmo que lleva de un número a su sucesor trabajando en el plano [sem-ins].

La parte B explora el aspecto cardinal invitando a los estudiantes al conteo de varias colecciones de frijoles, utilizando cartones de huevos de seis, un artefacto para visualizar los paquetes de seis frijoles, en un cartón de huevos lleno hay seis paquetes de seis, es decir, 100. Otro procedimiento podría ser contar los frijoles de uno en uno: aunque no haya palabras en este sistema, es posible utilizar la tabla construida en A como artefacto (colocar los frijoles sobre cada casilla o contar al mismo tiempo la colección y sobre la tabla). También se dan colecciones dibujadas no organizadas para automatizar la agrupación de seis en seis.

Posteriormente, se plantea una pregunta para saber cómo contar una colección utilizando este sistema de escritura de números. En este punto, se espera un trabajo de reflexión más profundo, sacando a la luz los dos principios fundamentales que hacen funcionar el sistema propuesto en A: el valor de las cifras en función de su posición en el número y la agrupación, en el plano [sem-ins]. No obstante, la génesis discursiva debe aparecer para poner en marcha el conteo agrupando por seis. De esta manera, es previsible un trabajo completo y, en función de la calidad de la explicación de los estudiantes, un trabajo conceptualizado, sobre todo si los estudiantes intentan establecer la relación con el algoritmo para la formación de números de la parte A.

Las partes C, D y E introducen las unidades de numeración y un nuevo registro para representar números, así como algunas sumas y conversiones entre unidades. Es deseable que en estas partes se formalicen, expliquen y automaticen los dos principios fundamentales, mediante un trabajo conceptualizado (quizás no para todas las tareas, en particular con una explicación de los restos en las sumas). La parte F tiene por objetivo sistematizar y sintetizar todo el trabajo realizado en vía de un trabajo conceptualizado, en especial destacando la necesidad de la numeración oral.

6. Análisis del trabajo matemático

En esta sección se presentan los principales resultados producto del análisis de los datos recolectados en cuatro secciones, siguiendo la metodología.

6.1 Sobre el trabajo individual

Como se esperaba, al completar la tabla (A1) se observa el uso de la base diez con cifras que no están presentes en la tabla. También se observan palabras que emplean la base diez, como “cuarenta y tres”, que estaban restringidas. Este trabajo se realizó en el plano [sem-ins], con una fluctuación entre los $\text{ETM}_{\text{decimal}}$ conocidos y los $\text{ETM}_{\text{secimal}}$.

Figura 2. Extracto de la producción de un estudiante

A1- Continuer la suite des nombres, de un en un, de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20
21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40
41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55	60
61	62	63	64	65	70	71	72	73	74	75	80
81	82	83	84	85	90	91	92	93	44	95	100
101	102	103	104	105	110	111	112	113	114	115	120
121	122	123	124	125	130	131	132	133	134	135	140
141	142	143	144	145	150	151	152	153	154	155	160
161	162	163	164	165	170	171	172	173	174	175	180
181	182	183	184	185	190	191	192	193	194	195	200
											etc.

Fuente: datos propios.

Durante esta aplicación, no hubo necesidad de hacer una puesta en común de los resultados, ya que la retroalimentación interna en cada grupo produjo la tabla correcta, como puede observarse en la siguiente figura.

Figura 3. Extracto de la producción de un grupo de estudiantes

A) La suite des écritures chiffrées

A1- Continuer la suite des nombres, de un en un, de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20
21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40
41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55	100
101	102	103	104	105	110	111	112	113	114	115	120
121	122	123	123	124	125	130	131	132	133	134	135
140	141	142	143	144	145	150	151	152	153	154	155
200											
											etc.

Fuente: datos propios.

La hipótesis de que "un número se confunde con su escritura en base diez" se ve apoyada en particular por las respuestas sistemáticas a la tarea A1 (ver figura 2), que muestra la preponderancia de la base diez. Con la base seis, la situación didáctica intenta modificar la relación con este aspecto del paradigma, lo que va acompañado de una reflexión sobre la noción de número, que se desarrolla en la Sección 7.

6.2 Descripción del trabajo matemático del grupo MASC

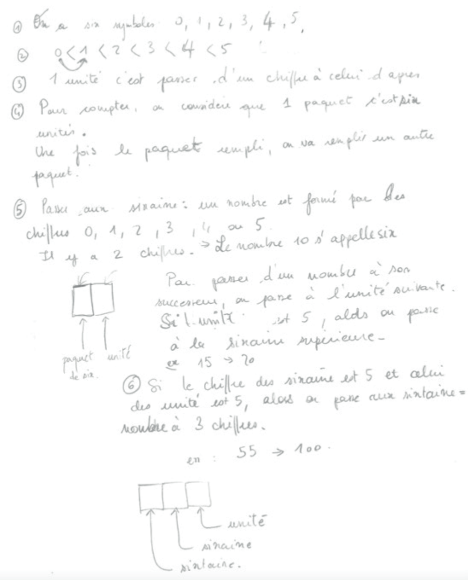
En el ETM idóneo propuesto, la primera parte tenía la intención de establecer el carácter ordinal y describir el sucesor de un número bajo este nuevo sistema. Sin embargo, el grupo MASC desarrolló un sistema de numeración funcional desde este punto, lo cual le tomó un tiempo considerable (alrededor de 40 minutos) en comparación con VAL y ESJL, quienes ocuparon la mitad del tiempo en esta parte de la secuencia. MASC inicia el trabajo discutiendo la asignación símbolo-cifra-número. Luego, los miembros del grupo operacionalizan una técnica propia del $ETM_{decimal}$, añadir 1 (+1), para obtener el sucesor de un número; así define la unidad. Para extender el conteo, una vez que se sobrepasan los seis elementos de un conjunto, MASC reagrupa en *paquetes* de seis unidades, transponiendo la noción de agrupación, propia de su $ETM_{decimal}$. De hecho, en su producción se observa una *caja de valores*, típica del trabajo que se realiza en el marco del sistema decimal:

Figura 4. Extracto de la producción del grupo MASC

Fuente: datos propios.

La activación de estos dos elementos, el conteo y la agrupación, permite el desarrollo del valor posicional en el trabajo matemático de MASC, explorando "¿por qué hacemos esto?" y "¿cómo lo hacemos?". No se trata de un simple desplazamiento de un conocimiento del $ETM_{decimal}$ personal a este $ETM_{secimal}$, sino de una trasposición justificada que estos estudiantes extienden al avanzar en la secuencia de tareas, obteniendo, entonces, una sucesión de representaciones de números mediante nuevos términos como *six*, *sixaine* y *sixtaine*, producto de la conjunción entre el tratamiento de las representaciones de números, la operacionalización de la técnica +1, el conteo, la agrupación y el valor posicional.

Figura 5. Extracto de la producción del grupo MASC en A1



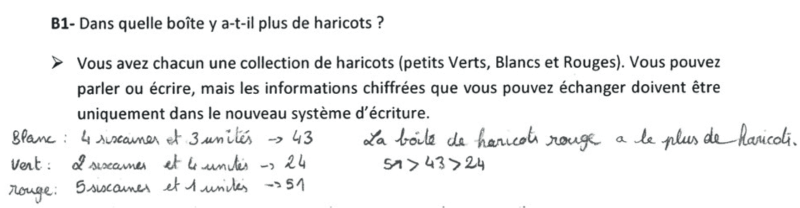
1. Tenemos seis símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5
2. 0<1<2<3<4<5
3. 1 unidad es pasar de una cifra a la siguiente.
4. Para contar, consideramos que 1 paquete son seis unidades.
5. Una vez que el paquete está completo, completamos otro paquete.
6. Pasar a la sixaine: un número está formado por las cifras 0, 1, 2, 3, 4 o 5.
7. Hay dos cifras → El número 10 se llama seis.
8. Para pasar de un número a su sucesor, pasamos a la siguiente unidad.
9. Si la unidad es 5, entonces pasamos a la sixaine siguiente.
   - Ej: 15 → 20
   - Si la cifra de las sixaine es 5 y la de las unidades es 5, entonces pasamos a la sixtaine = número de 3 cifras.
   - Ej: 55 → 100

Fuente: datos propios.

El trabajo realizado por MASC es remarcable. Está claro que estos estudiantes utilizan conocimientos de la base diez que transponen a la base seis, mediante un desarrollo interno que permite efectivamente la construcción de un ETM en base seis. Su trabajo no requiere la guía por partes como fue previsto: MASC se adelanta a la parte B, con los paquetes de seis; a las partes C, D y E, con las unidades de numeración; y a la parte F, puesto que presentan una síntesis. Adicionalmente, hay una anticipación del trabajo previsto para la Sesión 2, con la instauración de palabras para designar los números y las unidades. Únicamente la suma y las conversiones entre unidades de numeración son objeto de escasa atención por parte de este grupo. El trabajo es claramente completo y coherente, y sus explicaciones muestran los vínculos entre conceptos y conocimientos. A partir de A, MASC desarrolló un trabajo conceptualizado que responde prácticamente a las expectativas de la parte F.

Con un sistema de numeración en base seis bien construido y comprendido, la operacionalización de este sistema mediante las operaciones básicas fue una tarea simple para MASC. La segunda parte del ETM idóneo tenía por objetivo introducir la noción de agrupación, ese es un trabajo que ya había hecho este grupo de estudiantes. No obstante, este conjunto de tareas les permitió mecanizar su sistema de numeración, por ejemplo, en el conteo de los frijoles MASC establece para cada tipo de frijoles:

Figura 6. Extracto de la producción del grupo MASC en B1


B1- Dans quelle boîte y a-t-il plus de haricots ?

➢ Vous avez chacun une collection de haricots (petits Verts, Blancs et Rouges). Vous pouvez parler ou écrire, mais les informations chiffrées que vous pouvez échanger doivent être uniquement dans le nouveau système d'écriture.

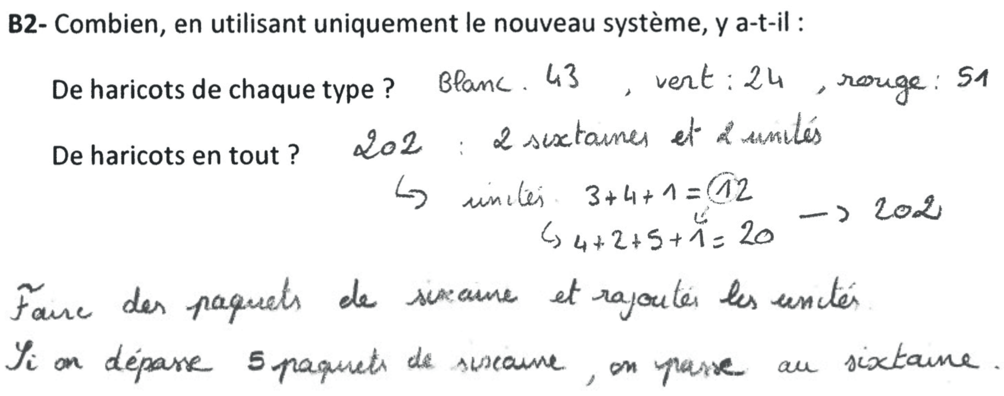
Blanc : 4 sixaines et 3 unités → 43 La boîte de haricots rouge a le plus de haricots.
Vert : 2 sixaines et 4 unités → 24 51 > 43 > 24
rouge : 5 sixaines et 1 unités → 51

Blancos: 4 sixaines y 3 unidades → 43
Verdes: 2 sixaines y 4 unidades → 24
Rojos: 5 sixaines y 1 unidades → 51

Fuente: datos propios.

Eso les permite un trabajo completamente en este nuevo sistema de representación de los números. En el siguiente extracto se observa que no hay uso de la clásica suma vertical, sino que se trata de una adición utilizando la agrupación y los términos introducidos por los estudiantes.

Figura 7. Extracto de la producción del grupo MASC en B2



B2- Combien, en utilisant uniquement le nouveau système, y a-t-il :

De haricots de chaque type ? Blanc . 43 , vert : 24 , rouge : 51

De haricots en tout ? 202 : 2 sixtaines et 2 unités

↳ unités . 3+4+1 = 12

↳ 4+2+5+1 = 20 → 202

Faire des paquets de sixaine et rajoutés les unités.

Si on dépasse 5 paquets de sixaine, on passe au sixtaine.

Fuente: datos propios.

Lo desarrollado en B muestra un trabajo completo y coherente con descomposiciones de números en unidades, lo que constituye un nuevo registro con conversiones. Es difícil saber si se trata de un trabajo conceptualizado por el tipo de datos recolectados. Sin embargo, en la figura 7 correspondiente a la producción del grupo MASC, la flecha que señala en la cifra 1 del 12 como 1 unidad de *sixaines*. De esta manera, las siguientes partes del ETM idóneo fueron desarrollas con agilidad y rapidez por MASC, evidenciando la compresión del sistema, con nuevas palabras que facilitan el trabajo, y terminando con una síntesis que retoma lo realizado en A y B.

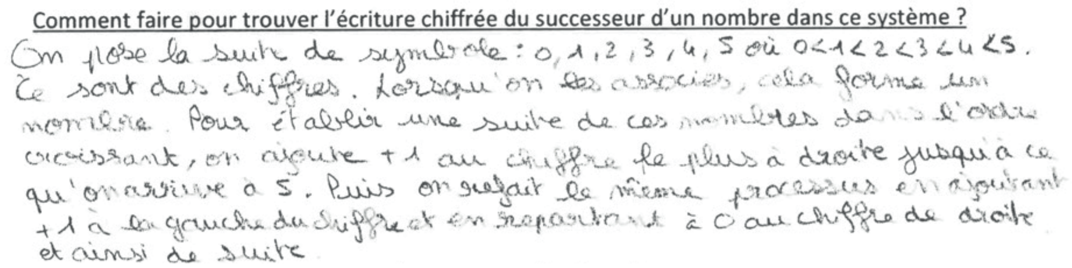
6.3 Descripción del trabajo matemático de los grupos ESJL y VAL

Como los grupos VAL y ESJL desarrollan trabajos similares, a continuación se presenta en detalle únicamente el trabajo de ESJL. Aunque es preciso señalar que VAL tuvo más dificultades para avanzar que ESJL, ambos grupos trabajaron hasta la parte D, ya que por cuestiones de tiempo era necesario continuar con la puesta en común (MASC había terminado para entonces todas las tareas de la Sesión 1).

Al determinar el sucesor de un número en este sistema, el grupo ESJL inicia por establecer los símbolos con los que trabajarán. Estos símbolos pasan a ser cifras en este contexto para, posteriormente, convertirse en un número una vez que estas son asociadas. En este caso, la técnica +1, añadir 1, también forma parte del $ETM_{decimal}$ personal y es operacionalizada por este grupo de estudiantes para describir el sucesor de un número.

Durante la primera parte de la sesión, bien que se observan pistas de la noción del valor posicional en el trabajo de ESJL, pues se trata de una idea muy rudimentaria inspirada en cómo cambian los números en la tabla dada: “añadimos +1 a la cifra más a la derecha hasta que llegamos a 5”. No hay un cuestionamiento en torno a las razones que movilizan tal acción, más allá de una mecanización que funciona para hallar al sucesor.

Figura 8. Extracto de la producción del grupo ESJL en A1


Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée du successeur d'un nombre dans ce système ?
On pose la suite de symbole : 0, 1, 2, 3, 4, 5 où 0<1<2<3<4<5.
Ce sont des chiffres. Lorsqu'on les associes, cela forme un nombre. Pour établir une suite de ces nombres dans l'ordre croissant, on ajoute +1 au chiffre le plus à droite jusqu'à ce qu'on arrive à 5. Puis on refait le même processus en ajoutant +1 à la gauche du chiffre et en repartant à 0 au chiffre de droite et ainsi de suite.

Fuente: datos propios.

Consideramos la sucesión de símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 donde 0<1<2<3<4<5

Estos son cifras. Cuando las asociamos, se forma un número. Para establecer una sucesión de estos números en orden creciente, añadimos +1 a la cifra más a la derecha hasta que llegamos a 5. Después hacemos el mismo proceso añadiendo +1 a la derecha de la cifra y reiniciando a 0 la cifra de la derecha y así sucesivamente.

El tiempo de reflexión en torno a esta primera tarea fue bastante reducido por parte de ESJL. Consiguieron desarrollar un algoritmo para obtener el sucesor de un número en base seis, sin explicarlo. Su trabajo es esencialmente [sem-ins], lo que era de esperar para esta parte. A nivel global, el trabajo de este grupo se limitará al plano [sem-ins], lo que hará que su trabajo sea más lento y poco eficaz en comparación con el de MASC. Además, sin un buen desarrollo del $\text{ETM}_{\text{secimal}}$ mediante un trabajo conceptualizado, la base diez seguirá estando muy presente. Por ejemplo, en la primera adición simple con frijoles, ESJL permanece anclado a la suma vertical clásica propia de su $\text{ETM}_{\text{decimal}}$. Nótese la diferencia con la suma MASC (véase la figura 7): el uso de la retención en el trabajo de ESJL es característico de un trabajo [sem-ins].

Figura 9. Extracto de la producción del grupo ESJL en B2

B2- Combien, en utilisant uniquement le nouveau système, y a-t-il :

De haricots de chaque type ? 24 haricots verts 54 haricots blancs

De haricots en tout ? 52 haricots rouges

$$\begin{array}{r} {}^{(1)} \\ 24 \\ 54 \\ +\ 52 \\ \hline 214 \end{array}$$

Fuente: datos propios.

Además, aunque la argumentación en términos de "la cifra a la derecha" y "la cifra a la izquierda" resulta obsoleta cuando se tiene más de 2 dígitos, este grupo de estudiantes continúa apegado a esta argumentación mecánica. Por ejemplo, en su producción expresan:

Figura 10. Extracto de la producción del grupo ESJL en B3

Comment peut-on faire pour dénombrer une collection avec ce système d'écriture des nombres ? (Plusieurs procédures sont demandées.)

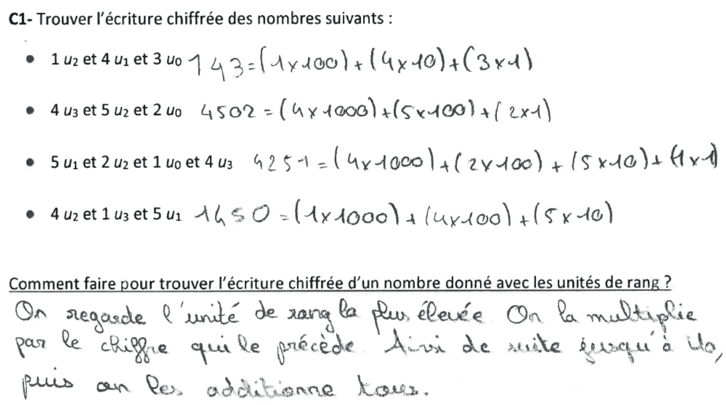
On fait des paquets de 10 symboles. Le nombre de ces paquets est le nombre de gauche et le reste des symboles constitu le chiffre de droite. Si on n'a pas de reste, il faut quand même noter 0 à droite.

Fuente: datos propios.

Hacemos paquetes de 10 símbolos. El número de estos paquetes es el número de la izquierda y el resto de símbolos constituye la cifra de la derecha. Si no tenemos resto, hay que escribir 0 a la derecha.

Observe que se trata de una argumentación anclada totalmente en lo simbólico y en la mecanización de una técnica para hallar los números correspondientes sin trazas del valor posicional: el trabajo es [sem-ins]. En las siguientes tareas, el valor posicional permanece ausente, el trabajo de este grupo consiste en la manipulación de los símbolos. En la tercera parte, de forma mecánica y mediado totalmente por el $ETM_{decimal}$ se acercan al valor posicional. Cuando se les cuestiona por la manera de encontrar la escritura cifrada de un número dado con las unidades relativas, ESJL ofrece una argumentación instrumental, alejada del lugar que ocupa cada símbolo y su respectivo significado:

Figura 11. Extracto de la producción del grupo ESJL en C1


C1- Trouver l'écriture chiffrée des nombres suivants :

- 1 u_2 et 4 u_1 et 3 u_0 143=(1x100)+(4x10)+(3x1)
- 4 u_3 et 5 u_2 et 2 u_0 4502=(4x1000)+(5x100)+(2x1)
- 5 u_1 et 2 u_2 et 1 u_0 et 4 u_3 4251=(4x1000)+(2x100)+(5x10)+(1x1)
- 4 u_2 et 1 u_3 et 5 u_1 1450=(1x1000)+(4x100)+(5x10)

Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée d'un nombre donné avec les unités de rang ?

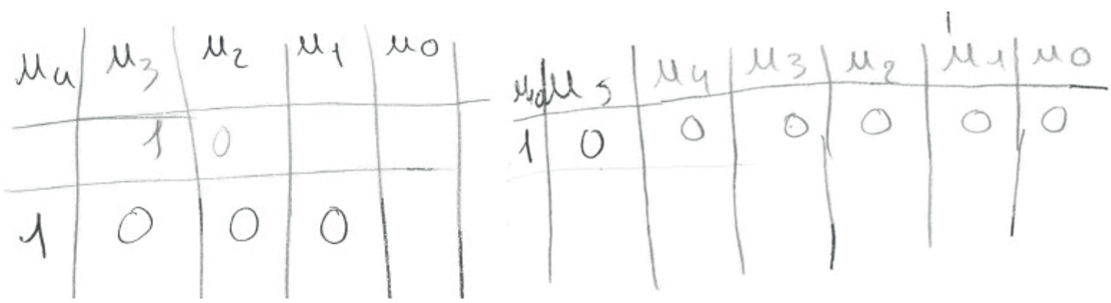
On regarde l'unité de rang la plus élevée. On la multiplie par le chiffre qui le précède. Ainsi de suite jusqu'à u_0, puis on les additionne tous.

Fuente: datos propios.

Observamos la unidad relativa más grande. La multiplicamos por la cifra que le precede. Así sucesivamente hasta u_0, después las adicionamos todas.

El trabajo, esencialmente [sem-ins], se importa de base diez a base seis, sin ninguna génesis discursiva que pueda permitir un trabajo conceptualizado y una comprensión del EMT de base seis. Este grupo opera el nuevo sistema con sus conocimientos de base diez, como puede verse en la figura 11. Asimismo, en la parte C construyeron un artefacto para las conversiones (ver figura 12). Se trata de una herramienta eficaz que mantiene su trabajo en el plano [sem-ins].

Figura 12. Extracto de la producción del grupo ESJL en C

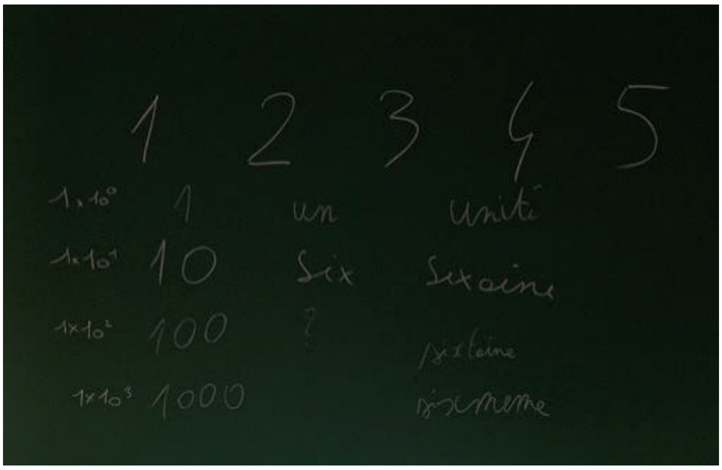


Fuente: datos propios.

6.4 Síntesis del trabajo realizado por los grupos - institucionalización

La puesta en común comienza con la presentación por parte del grupo ESJL del funcionamiento de su sistema expresado en forma de algoritmo de formación de números, en el plano [Sem-Ins]. Luego, el grupo MASC aportó rápidamente todo el trabajo discursivo y las palabras para designar los números, ausentes en los otros dos grupos. Posteriormente, se retomaron todas las ideas poniendo en perspectiva el trabajo de todos los grupos con el objetivo de la institucionalización de un sistema de representación común (ver figura 13). Esta institucionalización es, de hecho, necesaria para que la secuencia continúe.

Figura 13. Producción común en la pizarra



Fuente: datos propios.

En el caso del grupo MASC, con el trabajo conceptualizado que han desarrollado, cabe suponer que efectivamente han empezado a desarrollar no solo un E $ETM_{secimal}$, sino también una comprensión de este ETM. El tiempo empleado en la parte A, dada la génesis discursiva, se recuperó en gran medida después, puesto que su $ETM_{secimal}$ es muy eficaz. Aunque los otros dos grupos también empezaron a desarrollar un $ETM_{secimal}$, no activaron la dimensión discursiva. Se trata de una simple traducción de las técnicas conocidas de la base diez a la base seis; es decir, en el caso de ESJL y VAL no se tiene una comprensión del $ETM_{secimal}$. De hecho, su trabajo fue laborioso y lento, a tal punto que no lograron terminar todas las tareas. Fue la discusión final, con la presentación de la dimensión discursiva por parte de MASC, que permitió anclar esta comprensión en el $ETM_{secimal}$ personal para todos los estudiantes.

7. Una discusión en torno al paradigma

Si bien un paradigma es más cercano al ETM de referencia, los estudiantes y sus ETM personales se enmarcan bajo una institución, lo cual permite detectar rasgos de los paradigmas sobre la base de su trabajo matemático. En esta sección se presentan algunos de estos rasgos detectados a partir del estudio de la circulación del trabajo matemático, expuesto en la sección anterior. No se trata de la construcción o definición de los paradigmas numéricos, la intención de esta discusión es acercarse a estos paradigmas mediante elementos claves que sobresalen del trabajo de los estudiantes.

Independientemente del tipo de circulación del trabajo matemático, los tres grupos cuestionaron el uso de los términos asociados para designar un número; se debatieron entre *número*, *cifra* y *símbolo*. MASC y ESJL consideran "0, 1, 2, 3, 4, 5" como un conjunto de símbolos, señalando: "Tenemos seis símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5" o "Consideramos la sucesión de símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5". Luego, añaden el carácter ordinal a estos signos al establecer que el 0 representa al número más pequeño y el 5 al más grande de este conjunto.

Con la intención de describir el nuevo sistema de numeración, estos símbolos adquieren una nueva denominación *cifra*, al introducir la noción de *unidad*. En las producciones de los estudiantes este pasaje es muy natural; después de definir los símbolos a utilizar, MASC y ESJL establecen, por ejemplo, "1 unidad es pasar de una *cifra* a la siguiente" o "Estos son *cifras* [haciendo referencia a los símbolos]". Los datos recolectados no permiten comprender en detalle este pasaje. Sin embargo, pareciera que los estudiantes interpretan las cifras como símbolos que tienen cierto significado únicamente en el contexto numérico, donde existe una asignación unilateral símbolo cifras.

A partir de este concepto de *cifra*, los tres grupos establecen ¿qué es un número?, aunque no fue solicitado explícitamente en el ETM idóneo. Las tres producciones conceptualizan un número como la asociación de cifras. MASC y ESJL lo hacen de manera explícita: "Un *número* está formado por las cifras 0, 1, 2, 3, 4 o 5" y "Cuando las asociamos [haciendo referencia a las cifras], se forma un *número*"; mientras que el grupo VAL lo evidencia al definir el sucesor de un número.

Entonces, existe una asociación símbolo cifras número. La primera conexión, símbolo cifras, no dista de lo que establece el ETM de referencia: una cifra es concebida como un símbolo. En la segunda conexión, cifras número, entendiendo que un número es un objeto abstracto que expresa un valor, puede representar magnitudes, cantidades, posiciones, entre otros. ¿Están comprendiendo estos estudiantes que tales cifras se utilizan en la representación de números y que no son el número en sí mismo? Es muy temprano en el análisis de datos para responder esta pregunta porque hay un trabajo en las sesiones posteriores que podría arrojar elementos de respuesta, pero que no se discute en este artículo.

Ahora bien, en el trabajo del grupo MASC se observa una articulación entre el valor posicional con los símbolos seleccionados. Comprender la escritura de un número representado por varias cifras implica una codificación de las relaciones entre las cifras de manera aislada mediante la posición que ocupa en su escritura. En el sistema de numeración secimal, cada *sixaine* equivale a seis unidades, en general, cada valor posicional equivale a seis unidades del valor inferior. A diferencia de la representación oral, en la representación escrita de un número hay la implicación directa de la adición y el producto en la representación escrita. Entonces, comprender el valor posicional de las cifras de 43 (ver figura 7), por ejemplo, significa identificar que:

- 4 representa 40 sixaines
- Hay 4 grupos de 10 (seis) unidades simples, esto es, 4×10=40
- 40+3=43

Aunque comprender el valor posicional no significa tener una compresión profunda del concepto de número, el trabajo conceptualizado en torno al valor posicional por parte del grupo MASC es de suma importancia. Esto, porque esta conexión entre el cuestionamiento → cifra → número y el desarrollo del valor posicional converge en el establecimiento de otro sistema de representación funcional (en base seis) para los números. Entonces, a partir del trabajo en la sesión 1, MASC cuenta con dos sistemas de representación para los números, en base diez y en base seis.

Además, la hipótesis 1 plantea la confusión del número con su representación cifrada, pero el rango de esta confusión se reduce considerablemente, al menos para el grupo MASC, al existir al menos dos sistemas de representación para el número. Después de la institucionalización, a partir del trabajo en base seis se da una evolución del paradigma común, tomando conciencia del papel no absoluto de la base diez. Sin embargo, pareciera que este ETM idóneo de la Sesión 1 no tiene incidencia en la asociación número cifra; es un cuestionamiento que permanece abierto para próximas investigaciones.

8. Conclusiones

En esta primera sesión analizada en este artículo es posible observar la importancia del trabajo conceptualizado que, de hecho, es el criterio empleado para acreditar la comprensión. Un trabajo que se limite al plano [sem-ins], mediante la traducción de $ETM_{decimal}$ a $ETM_{secimal}$, no permite tal comprensión y, en última instancia, bloquea el trabajo, lo hace más laborioso y menos eficaz, tal como se observa en el trabajo desarrollado por ESJL y VAL. En contraste, el grupo MASC desarrolla desde el inicio de la sesión un trabajo conceptualizado que les permite navegar de manera fluida a través de las tareas propuestas en este ETM idóneo. En general, es en la puesta en común final cuando se desarrolla o profundiza la comprensión, mediante preguntas dirigidas por parte de los formadores. Pero, en esta implementación, se aprovechó el trabajo conceptual del grupo MASC para el momento de institucionalización, cuyo objetivo es disponer de un $ETM_{secimal}$ funcional, alternativo al $ETM_{decimal}$.

Asimismo, en el estudio de esta sesión se observa el preámbulo de un cambio en ciertos elementos clave del paradigma numérico. Tras esta primera sesión, los estudiantes disponen de una representación alternativa para los números. Aunque podrían conservar la idea de que un número está formado por cifras, la presencia de otro sistema de representación puede contribuir al cuestionamiento sobre la confusión de un número con su representación en base diez. De ahí la importancia del desarrollo de un $ETM_{secimal}$ tan funcional como el $ETM_{decimal}$. En ese contexto, se dispondrá no solo de una representación alternativa a la base diez, sino de todo un ETM alternativo: no importa si un número se representa en base seis o en base diez, porque los mismos problemas pueden resolverse en cualquiera de los dos ETM. Sin embargo, la cuestión que queda por abordar es cómo este trabajo puede beneficiar a la enseñanza del sistema de numeración clásico en base diez, porque ese es el objetivo último de la formación.

9. Referencias bibliográficas

Anselmo, B. y Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération-une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N*, *91*, 71-91.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Cabrera, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F. y Vivier, L. (2025). Conceptualized mathematical work. *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique*, A paraître.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de didactique des disciplines, spécialité didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *30*, 317-366.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas* (Agustín Contin, trad.). Fondo de Cultura Económica.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

López, S. S. y Vivier, L. (2023). Local visualization of functions in work on optimization. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *42*(4), 305-324. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac022

Ministerio de la Educación Nacional y de la Juventud (23 de mayo del 2024). *Programmes et horaires à l'école élémentaire*. https://www.education.gouv.fr/programmes-et-horaires-l-ecole-elementaire-9011.

Nikolantonakis, K. y Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. MENON, issue 2a, 99-114.

Nikolantonakis, K. y Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, *30*(54), 23-44. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a02

Peteers, F. y Vivier, L. (2022). Les mathématiques pour la formation des enseignants du premier degré revisitées par le système sécimal. *Grand N*, *109*, 33-54.

Peteers, F. y Vivier, L. (2023). Petit détour par le système sécimal. En Dans C., Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 431-442). IREM de Strasbourg, 27 juin-2 juillet 2022, Strasbourg (France).

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, *86*, 59-90.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de didactique des disciplines, spécialité didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

Tempier, F. (2018). Des pistes pour enseigner les grands nombres au cycle 3. *Petit x*, *108*, 41-66.

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 03-09-24 | Aceptado: 13-11-24 | Publicado: 20-12-2024

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN AFÍN Y LINEAL A PARTIR DE UNA TAREA ABIERTA EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

INTRODUCE THE CONCEPT OF AFFINE AND LINEAR FUNCTION FROM AN OPEN TASK IN A TECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

ESTUDIO

CATALINA PALACIOS BEZAMA
Universidad de Playa Ancha
Valparaíso, Chile
catalina.palacios@upla.cl
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7301-5824

JORGE GAONA PAREDES
Universidad de Playa Ancha
Valparaíso, Chile
jorge.gaona@upla.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6367-529X

Resumen

El estudio se centra en analizar cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico (13 y 14 años) en relación con la función lineal y afín al enfrentarse a una tarea abierta en un entorno tecnológico. Se utiliza la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático para estudiar lo realizado por los y las estudiantes. La metodología de investigación responde a las fases de la Ingeniería Didáctica, en cuya fase preliminar se realiza un análisis curricular que permite el diseño de la tarea abierta contextualizada. En primera instancia, los y las estudiantes se enfrentan a una tarea sobre cotización de salones de eventos, que puede resolverse de manera aritmética. En segunda instancia, se lleva a cabo una discusión colectiva con los resultados obtenidos por los y las estudiantes, lo que permite la construcción de los conceptos de función lineal y afín, que se encontraban de manera implícita en la tarea. Los resultados muestran un tránsito de un trabajo matemático aritmético individual hacia un trabajo funcional colectivo guiado por la docente a cargo y el rol de la tarea en la plataforma para permitir el trabajo matemático colectivo.

Palabras clave: Evaluación en línea, función lineal y afín, tarea abierta, trabajo matemático.

Abstract

The study focuses on analyzing how the mathematical work of eighth grade students (13 and 14 years old) develops in relation to linear and affine functions when faced with an open-ended task in a technological environment. The Mathematical Workspace Theory is used to study what students do. The research methodology responds to the phases of Didactic Engineering, which in its preliminary phase a curricular analysis is carried out that allows the design of the contextualized open task. In the first instance, students are faced with a task about the quotation of event rooms, which can be solved arithmetically. In the second instance, a collective discussion is carried out with the results obtained by the students, which allows the construction of the concepts of linear and affine function, which were implicit in the task. The results show a transition from an individual arithmetic mathematical work to a collective functional work guided by the teacher in charge and the role of the task in the platform to allow collective mathematical work.

Keywords: Online assessment, linear and affine function, open task, mathematical work.

1. Introducción

La evaluación educacional ha ido evolucionando según las necesidades contextuales y educativas, teniendo un papel fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dentro de los distintos cambios que ha experimentado la evaluación educativa, se encuentra el enfoque de la evaluación para el aprendizaje, que busca mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los y las estudiantes, haciéndolos partícipes de su proceso, entregándoles herramientas para el desarrollo del pensamiento crítico y resolución de problemas (Cambridge Assessment International Education, 2019; Castro y Moraga, 2020; Gaona y Palacios, 2023; Rodríguez y Salinas, 2020). Por otro lado, la evaluación del aprendizaje tiene como objetivo medir el rendimiento final y otorgar información para posibles comparaciones de programas de estudios (Moreno, 2016; Organización de las Naciones Unidas para la Educación, 2017).

Durante las últimas décadas se han desarrollado nuevos formatos digitales de evaluación, en particular, en este trabajo nos centramos en los sistemas de evaluación en línea, que tienen como particularidad la necesidad de conexión a internet para su funcionamiento (Olsher *et al*., 2024; Sangwin, 2013; Stacey y Wiliam, 2013).

Las investigaciones centradas en este formato son abundantes. Gaona (2020) realizó una revisión bibliográfica de las investigaciones de Scopus y WOS hasta el 2019, los cuales fueron clasificados según dos focos: investigaciones centradas en los y las estudiantes e investigaciones centradas en los artefactos tecnológicos utilizados.

En el primer foco, los artículos analizan tanto los impactos en el rendimiento como en variables socioafectivas. Los estudios reportan resultados mixtos sobre el impacto del rendimiento, siendo en su mayoría resultados positivos a partir de su uso. En las variables socioafectivas todos los resultados son positivos, más aún, cuando existe una retroalimentación paso a paso. En el segundo foco, se analiza cómo las características tecnológicas específicas pueden jugar un rol clave en la interacción entre los y las estudiantes, los profesores y los sistemas de evaluación en línea. Se concluye que, al trabajar en áreas particulares, como el cálculo, álgebra, geometría o estadísticas, el trabajo se enriquece cuando se utilizan softwares específicos para estos. En general, en los artículos analizados no se observa una discusión epistemológica de los objetos matemáticos involucrados.

Para actualizar esta revisión, se hizo un análisis de la literatura entre los años 2020 y 2023, obteniéndose 25 artículos, los cuales en su mayoría pueden ser analizados desde la relación que tiene el sistema de evaluación con los estudiantes y los artefactos. Además, se destaca que, en comparación con los años anteriores, se pueden identificar más estudios que presentan una discusión epistemológica sobre los objetos matemáticos involucrados (Barana *et al*., 2021; Gaona y Hernández *et al*., 2022; Gaona y López *et al*., 2022; Gaona y Menares, 2021; Popper y Yerushalmy, 2022; Putra *et al*., 2023; Sangwin, 2023; Yerushalmy y Olsher, 2020).

En el caso de Popper y Yerushalmy (2022), se enfocan en cómo estudiantes de primaria de 11 años utilizan una plataforma digital que proporciona herramientas que monitorean ejemplos producidos por ellos mismos respecto a cuadriláteros. A nivel secundario, Yerushalmy y Olsher (2020) exploran las oportunidades que entrega la evaluación en línea respecto al razonamiento lógico que utilizan los estudiantes de 15-16 años para trabajar la semejanza de triángulos. Barana *et al*. (2021) estudian cómo funciona la retroalimentación interactiva para preguntas de funciones en 299 estudiantes italianos de octavo grado.

Respecto a estudios dirigidos a nivel universitario, Gaona *et al*. (2022) muestran los resultados de un experimento en 170 estudiantes universitarios de Chile, quienes resuelven una tarea relacionada con la gráfica de la función afín en un entorno digital. Por su parte, Putra *et al*. (2023) investigaron sobre el conocimiento matemático y didáctico en números racionales de los profesores en formación en Indonesia. Gaona y Menares (2021) reportan sobre el trabajo de argumentación de profesores en formación inicial en Chile, durante una clase *online* en la pandemia respecto a fracciones.

Como se puede observar en el análisis previo, se necesita mucha investigación en los distintos temas matemáticos del currículum. En este artículo se tomó la decisión de trabajar con funciones debido a la importancia curricular que se le otorga dentro de la enseñanza de la matemática en Chile. Respecto a este concepto, varias investigaciones refieren a las dificultades que existen al aprender el concepto de función, por ejemplo, en su conversión y tratamiento de sus registros de representación, la distinción entre variable e incógnita, enunciar situaciones que involucren una relación funcional entre variables, discernir entre funciones y ecuaciones, entre otros (Armas, 2020; Cuesta *et al*., 2010; Duval, 2006; Escorcia y Riveros, 2021; Ledezma *et al*., 2018; López y Sosa, 2008).

Por otra parte, si bien en los planes y programas se fomenta el uso de tecnología y algunas investigaciones muestran los beneficios de trabajar con ella, como desarrollar habilidades cognitivas tales como la argumentación o la representación, entre otras (Gaona y Menares, 2021; Gaona y Vivier, 2022), aún son escasas las investigaciones donde se trabaja el concepto de función en sistemas de evaluación en línea.

Tras los antecedentes, nace la necesidad de estudiar cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico respecto a funciones lineales y afines, considerando lo cognitivo y epistemológico. Esto particularmente cuando se enfrentan a una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea, la cual ofrece retroalimentación inmediata y personalizada. Además, la investigación espera contribuir al campo de la educación matemática, en especial cuando se evalúa la comprensión de objetos matemáticos, ya que los resultados permitirán diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje más efectivas y adaptadas a las necesidades individuales de quienes aprenden.

Este estudio busca responder: ¿cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico en relación con las funciones lineales y afines cuando resuelven una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea?

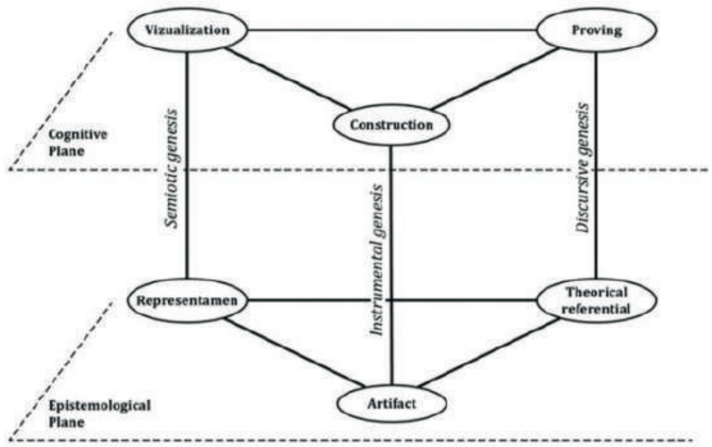
A continuación, se detalla la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al.,* 2022) que nos permite comprender qué estamos evaluando cuando se trabaja con una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea.

Cabe destacar que este estudio se realiza bajo el marco del proyecto "Relación entre el *feedback* y el trabajo matemático de estudiantes en el contexto de evaluación en línea en matemática"[1] y de la tesis de Magíster de Evaluación Educacional (Palacios, 2023).

2. Marco teórico

La elección de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al*., 2022) se sustenta en su utilidad, ya que permite describir, analizar y comprender el trabajo matemático articulando, mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo (figura 1). En este estudio se consideran las nociones de ETM personal (Menares Espinoza y Vivier, 2022) y la de ETM colectivo (Gaona *et al*., en prensa).

Figura 1. Esquema Espacio del Trabajo Matemático



Fuente: Kuzniak *et al*. (2022, p. 86).

1 Proyecto Fondecyt de Iniciación N° 11230953 a cargo del investigador responsable Jorge Gaona, perteneciente a Ciencias de la Educación de la Universidad de Playa Ancha.

Se entenderán las génesis como el comienzo, proceso, desarrollo e interacción entre los planos epistemológico y cognitivo (Gaona, 2018), conocidos también como planos horizontales.

Para comprender cómo se articulan los planos horizontales, es necesario describir la génesis semiótica, instrumental y discursiva.

- Génesis semiótica: articula el proceso de visualización con el representamen, considerando a los elementos matemáticos en sus distintas formas de representación y son interpretados mediante procesos cognitivos ligados a la visualización.
- Génesis instrumental: articula el proceso de construcción y artefactos, explica cómo un artefacto (simbólico, material o digital) se convierte en instrumento, permitiendo construir el objeto matemático (Montoya-Delgadillo *et al.*, 2014).
- Génesis discursiva: articula el proceso del referencial teórico y la prueba, asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades (Gaona, 2018).

El plano epistemológico está constituido por el referencial teórico, el representamen y los artefactos. El primero refiere a las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático, por otra parte, el representamen se relaciona con los registros semióticos de los objetos matemáticos (Duval, 1995). Por último, los artefactos son construcciones humanas simbólicas, digitales o materiales con fines matemáticos. En los artefactos simbólicos, por ejemplo, encontramos algoritmos para obtener resultados. Los artefactos digitales se refieren a programas informáticos o aplicaciones móviles que realizan operaciones matemáticas (Flores *et al*., 2022) o materiales como compás, regla, entre otros.

Por otra parte, el plano cognitivo está constituido por los procesos de visualización, construcción y prueba. El primero está ligado con la interpretación de signos y la construcción interna de la representación de los objetos y sus relaciones. La construcción tiene que ver con la utilización de artefactos para la observación, exploración y experimentación del objeto. La prueba, en cambio, se vincula con el proceso de justificación mediante definiciones o propiedades.

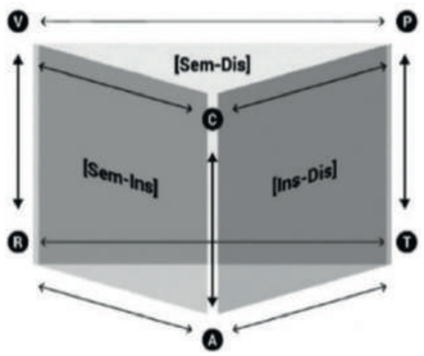
Al relacionar las génesis que establece el ETM con el objeto matemático funciones, se entiende la génesis semiótica como las distintas formas de representación, tales como gráfico, algebraico, tabla de valores, diagrama sagital o lenguaje natural, y que el objeto es interpretado mediante procesos cognitivos ligados a la visualización de sus diferentes representaciones.

La génesis discursiva se asocia a la definición de función como una relación que se establece entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Es decir, disponer de argumentos utilizando conceptos relacionados, como, por ejemplo, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente, entre otros. También cuando se establece una justificación o demostración por medio de un razonamiento matemático (propiedad o teorema).

Por su parte, la génesis instrumental se activa cuando se utilizan algoritmos en el proceso de construcción sin hacer ninguna justificación relacionada con la génesis discursiva o cuando se consideran programas informáticos, tales como GeoGebra o Symbolab, entre otros.

Pese a que se describen las tres génesis que se activan durante el trabajo matemático, es posible que estas operen simultáneamente, lo cual sucede cuando no se logra hacer separación de las génesis. En estos casos, se activaban los planos verticales, como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Esquema del ETM y sus planos verticales



Fuente: extraído de Kuzniak *et al*. (2022, p. 11).

En este estudio se consideran las nociones de ETM personal (Menares Espinoza y Vivier, 2022) y de ETM colectivo (Gaona *et al*., en prensa). El personal se refiere a la construcción individual que cada estudiante tiene respecto a un objeto matemático, que incluye las concepciones, conocimientos, habilidades y estrategias que utiliza al enfrentarse a problemas matemáticos. Es decir, una representación de cómo un individuo entiende y realiza el trabajo matemático. Respecto al ETM colectivo, es un espacio de trabajo en el que uno o varios conceptos matemáticos están presentes y emergen del trabajo de estudiantes individuales o de pequeños grupos, que pueden estar guiados por el o la profesora o trabajar sin su intervención directa durante el curso.

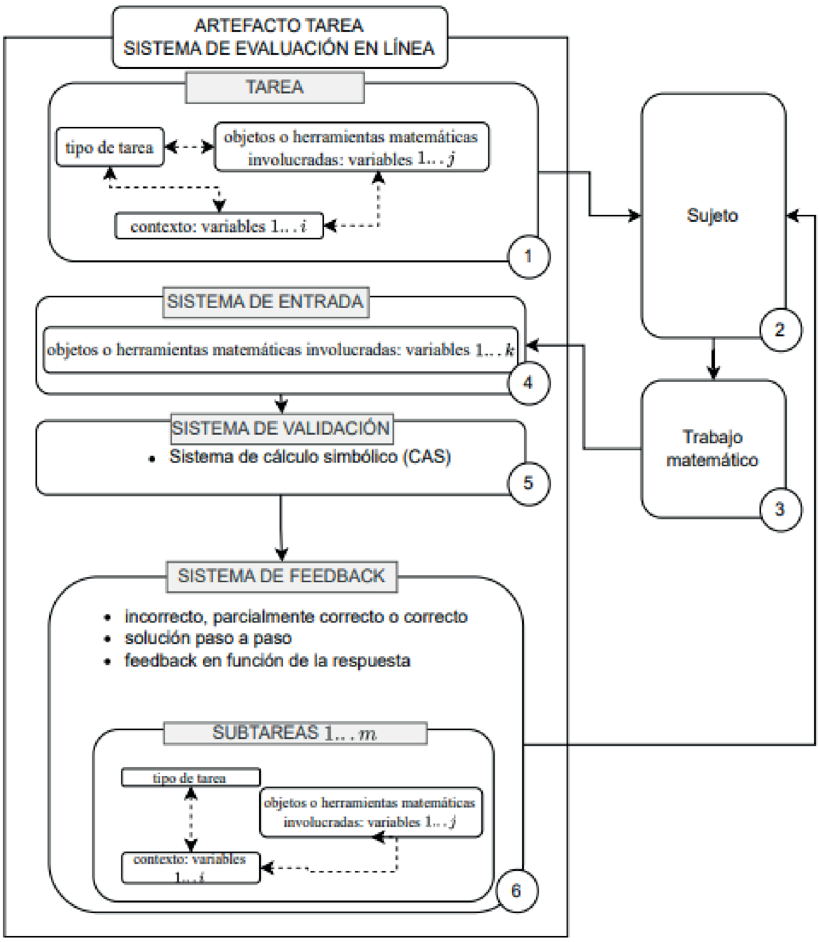
Este objeto o concepto matemático no puede configurarse únicamente a partir de la ETM personal. Por ello, el ETM colectivo se nutre de los elementos constitutivos de la clase, ya sean alumnos o profesor, que interactúan constantemente. En otras palabras, la noción matemática, cuando se analiza a partir del ETM personal, se diluye, mientras que en el ETM colectivo, cada una de las aportaciones personales forma la noción.

Pese a que el ETM permitirá generar un análisis e interpretación de la información que se recopilará en la investigación, es importante mencionar que esta teoría no considera la tarea como parte de esta, por lo que se entenderán las tareas como actividades organizadas que permiten a los y las estudiantes construir sus propios conocimientos y habilidades; para ello, se consideran tres componentes didácticos de una tarea: el tipo de tarea, nociones matemáticas involucradas y el contexto (Gaona, 2018). Por otra parte, en Gaona, López y Montoya-Delgadillo (2022) se hace una descomposición de un artefacto tarea en cuatro componentes: enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback,* que están ligados al artefacto digital involucrado. Al complementar estas dos descomposiciones más el sujeto que responde a una tarea, quien a partir de ella realiza un trabajo matemático específico (sección anterior), se pueden articular en el esquema que se muestra en la figura 3 tal como sigue:

- El sistema de evaluación presenta una tarea en el punto 1 con tres componentes: tipo de tarea, objeto o nociones matemáticas involucradas y contexto.
- El sujeto que responde es esquematizado en el punto 2.
- El sujeto al enfrentarse a la tarea realiza un trabajo matemático esquematizado en el punto 3.
- El estudiante lo que ingresa es una respuesta al sistema de entrada en el punto 4.
- El sistema valida la respuesta (punto 5) y luego entrega un *feedback* al sujeto (punto 6).
- Finalmente, tras entregar el *feedback* (punto 6), el sujeto puede utilizar la información eventualmente en un nuevo ciclo.

Dentro de los tipos de tareas en sistemas de evaluación en línea, en este trabajo se considera una tarea abierta como aquella que permite que se generen múltiples respuestas en lugar de elegir entre opciones predefinidas o respuestas únicas (Gaona, 2022). Este tipo de tarea permite observar el potencial de conjeturas que proponen los y las estudiantes (Gaona, López y Delgadillo, 2022; Luz y Yerushalmy, 2019; Yerushalmy y Olsher, 2020).

Figura 3. Articulación de una tarea con sus componentes y un sujeto mediante un trabajo matemático



Fuente: elaboración propia.

3. Metodología

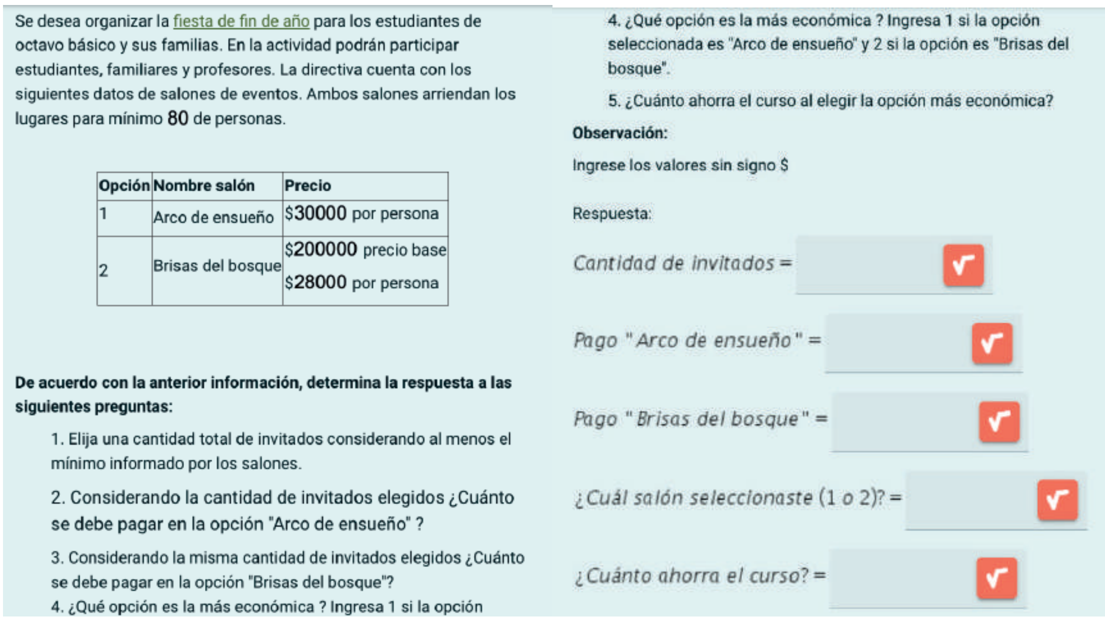
Respecto a la metodología, el estudio responde al diseño de experimentos, específicamente la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2015), ya que permite diseñar, desarrollar y analizar secuencias de enseñanza para mejorar la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos. El diseño cuenta con cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori*.

Para el análisis preliminar, se realizó un análisis curricular del Texto de Estudiante de octavo básico en matemática, específicamente a las tareas que se proponen en la lección de funciones. Para esto se agruparon las actividades propuestas según tipos de tareas, representación de función utilizada en el enunciado y las génesis que se activan de acuerdo al Espacio de Trabajo Matemático.

A modo general, se analizan 110 tareas, de las cuales el 83,6% presenta un único registro de representación (lenguaje natural, lenguaje algebraico, tabla de valores, gráfico o diagrama sagital), siendo el lenguaje algebraico el que predomina entre los demás. Llama la atención que solo se presentan dos tareas con uso de tecnologías, ya que el mismo Mineduc promueve el uso de las tecnologías para el aprendizaje en matemática. Además, se observa la falta de tareas que motiven la transición por la génesis semiótica, discursiva e instrumental y que incluyan el uso de artefactos digitales. Por esta razón, se propone una tarea contextualizada para introducir el concepto de función lineal y afín en un entorno digital.

La tarea que se plantea está relacionada con seleccionar un salón de eventos para una fiesta de fin de año mediante la cotización según la cantidad de invitados (figura 4). Esta tarea presenta un problema que puede ser abordado netamente desde lo aritmético, sin embargo, implícitamente existen dos funciones que modelan la cotización de cada salón.

Figura 4. Enunciado de la tarea y sistema de entrada


Se desea organizar la fiesta de fin de año para los estudiantes de octavo básico y sus familias. En la actividad podrán participar estudiantes, familiares y profesores. La directiva cuenta con los siguientes datos de salones de eventos. Ambos salones arriendan los lugares para mínimo **80** de personas.

Opción	Nombre salón	Precio
1	Arco de ensueño	$30000 por persona
2	Brisas del bosque	$200000 precio base $28000 por persona

De acuerdo con la anterior información, determina la respuesta a las siguientes preguntas:

1. Elija una cantidad total de invitados considerando al menos el mínimo informado por los salones.
2. Considerando la cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Arco de ensueño" ?
3. Considerando la misma cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Brisas del bosque"?
4. ¿Qué opción es la más económica ? Ingresa 1 si la opción seleccionada es "Arco de ensueño" y 2 si la opción es "Brisas del bosque".
5. ¿Cuánto ahorra el curso al elegir la opción más económica?

Observación:

Ingrese los valores sin signo $

Respuesta:

Cantidad de invitados =

Pago "Arco de ensueño" =

Pago "Brisas del bosque" =

¿Cuál salón seleccionaste (1 o 2)? =

¿Cuánto ahorra el curso? =

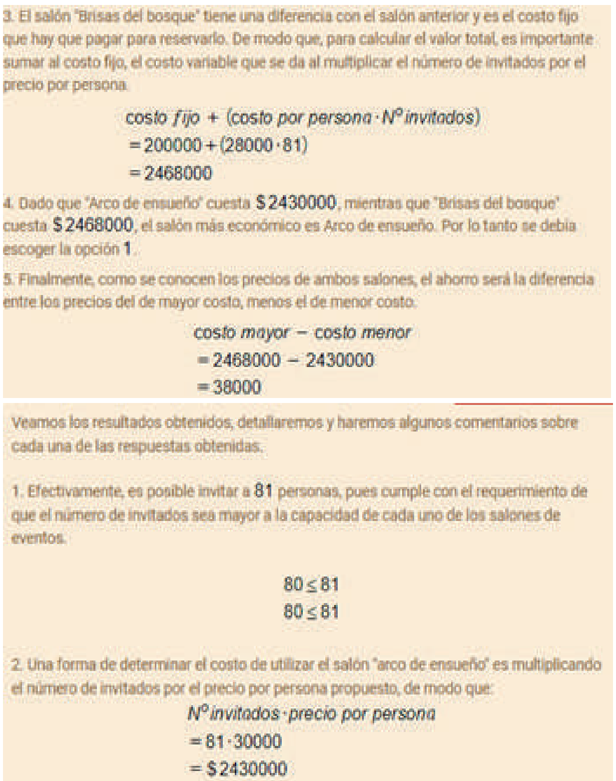
Fuente: elaboración propia.

Al momento en que los estudiantes ingresen sus respuestas en el sistema de entrada, el sistema de validación las corrobora, indicando si son correctas o incorrectas (ver figura 5). Luego, se activa el sistema de *feedback* (ver figura 6), el cual orienta al estudiante en sus respuestas e invita a reintentar el cuestionario hasta obtener la contestación esperada.

Figura 5. Sistema de validación

Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Sistema de *feedback*



3. El salón "Brisas del bosque" tiene una diferencia con el salón anterior y es el costo fijo que hay que pagar para reservarlo. De modo que, para calcular el valor total, es importante sumar al costo fijo, el costo variable que se da al multiplicar el número de invitados por el precio por persona.

$$\begin{aligned}&\textit{costo fijo} + (\textit{costo por persona} \cdot N^{o}\,\textit{invitados})\\&= 200000 + (28000 \cdot 81)\\&= 2468000\end{aligned}$$

4. Dado que "Arco de ensueño" cuesta $\$2430000$, mientras que "Brisas del bosque" cuesta $\$2468000$, el salón más económico es Arco de ensueño. Por lo tanto se debía escoger la opción 1.

5. Finalmente, como se conocen los precios de ambos salones, el ahorro será la diferencia entre los precios del de mayor costo, menos el de menor costo.

$$\begin{aligned}&\textit{costo mayor} - \textit{costo menor}\\&= 2468000 - 2430000\\&= 38000\end{aligned}$$

Veamos los resultados obtenidos, detallaremos y haremos algunos comentarios sobre cada una de las respuestas obtenidas.

1. Efectivamente, es posible invitar a 81 personas, pues cumple con el requerimiento de que el número de invitados sea mayor a la capacidad de cada uno de los salones de eventos.

$$80 \leq 81$$
$$80 \leq 81$$

2. Una forma de determinar el costo de utilizar el salón "arco de ensueño" es multiplicando el número de invitados por el precio por persona propuesto, de modo que:

$$\begin{aligned}&N^{o}\,\textit{invitados} \cdot \textit{precio por persona}\\&= 81 \cdot 30000\\&= \$2430000\end{aligned}$$

Fuente: elaboración propia.

El trabajo se divide en dos instancias: la primera corresponde al trabajo individual en la plataforma, donde se encuentra la tarea detallada anteriormente, en tanto la segunda es el trabajo colectivo, el cual consiste en compartir lo realizado en la plataforma y el/la docente propone preguntas guías al grupo curso. En esta instancia, se identificarán distintos episodios de acuerdo al trabajo colectivo, se denotará como $E_1,\ldots,E_n$ según corresponda y serán analizados mediante las categorías de análisis del potencial trabajo matemático (tabla 1).

Durante el trabajo en la plataforma, los y las estudiantes podrán acceder a diferentes artefactos, ya sean materiales, simbólicos o digitales, junto con recibir retroalimentación personalizada e inmediata y múltiples intentos. Mientras que, en el trabajo colectivo, cuando cada dupla termine el proceso se les invita a compartir sus resultados (la plataforma les indica si están correctos o incorrectos), es decir, señalar la cantidad de invitados seleccionados y los presupuestos para ambos salones, organizando esta información en la pizarra en una tabla de valores, para luego construir su representación gráfica mediante GeoGebra. Por su parte, el docente a cargo guiará el trabajo colectivo del curso, por ejemplo, invitar a cuestionarse la variabilidad de cada gráfica, cómo se comportan o cuál salón conviene según la cantidad de invitados.

Respecto a la experimentación, se realizará en la sala del Centro de Recursos para el Aprendizaje (CRA) del establecimiento, que está conformada por una biblioteca y 15 computadores de escritorio con acceso a internet, pizarra y proyector. Por su parte, el entorno virtual a utilizar es una plataforma (Moodle/Wiris) que permite el uso de expresiones matemáticas equivalentes, respuestas abiertas, múltiples intentos y retroalimentación inmediata.

Se debe considerar la descomposición del artefacto digital (figura 3) de la tarea: enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback*, como se indicó anteriormente en las figuras 4, 5 y 6. Cada uno de estos elementos de la descomposición contribuye a asegurar que los y las estudiantes tengan claridad de lo que se espera de ellos, es decir, qué se está evaluando. No solo basta con responder las preguntas, sino que recibir validación de estas y retroalimentación que les permita ser sujetos activos en su proceso de aprendizaje.

Los participantes del estudio son estudiantes de octavo año básico de un establecimiento subvencionado de la comuna de Valparaíso. El grupo curso está conformado por 29 estudiantes, sus edades son principalmente de 13 y 14 años a excepción de 2 estudiantes con 15 años y uno con 12 años. La selección del caso fue intencionada, y se fundamenta en razones de accesibilidad y pedagógico-curricular. Lo primero, ya que se buscaba mayor familiaridad con el entorno y una implementación natural en la recolección de datos. Respecto a lo pedagógico-curricular, al conocer los contenidos trabajados previamente y las estrategias en el proceso de enseñanza-aprendizaje, permite tener mayores herramientas para guiar el trabajo colectivo.

Debido a las condiciones físicas del lugar y la necesidad de registrar cómo los y las estudiantes se enfrentan a la tarea se opta que sea realizada en duplas (D_1, ..., D_n). Sin embargo, en caso de que existan estudiantes que decidan trabajar de manera individual se denotará como $I_1,...,I_n$.

Para la recolección de datos en las instancias descritas en la fase anterior, se utilizarán videograbaciones, una cámara fija al final de la sala y una en movimiento a cargo de un comunicador audiovisual, por su parte, el o la profesora traerá un micrófono para captar las conversaciones cuando está en movimiento. Además, las duplas que utilizarán *notebooks* graban sus pantallas utilizando la herramienta de captura de pantalla y audio de Windows (Modo Gamer), y quienes estén en computadora de escritorio deberán grabar pantalla mediante una página web EaseUs y grabaciones de audio con celulares.

Se debe considerar como:

V1: Videograbación en movimiento.
V2: Videograbación fija.

Por otra parte, se tomarán en cuenta los registros automáticos de la plataforma pudiendo observar sus respuestas abiertas, la cantidad de intentos de la tarea y los minutos que se dedican a resolver el cuestionario.

Cabe destacar que el estudio solo considerará las respuestas de los y las estudiantes que cuenten con el consentimiento informado de sus tutores y el asentimiento. Esto con el fin de tener una participación consensuada, resguardo de la privacidad y bienestar de los y las participantes.

Para estudiar el desarrollo del trabajo matemático a través de la activación de las génesis y/o planos verticales del potencial trabajo matemático, se utilizan las categorías de análisis de la tabla 1, la cual articula el ETM y su relación con las funciones.

Tabla 1. Categorías de análisis del potencial trabajo matemático

DIMENSIÓN	CATEGORÍA	DESCRIPTOR
Génesis semiótica	Representamen	Considera los elementos matemáticos en sus distintas formas de representación, tales como gráfico, algebraico, tabla de valores, diagrama sagital o lenguaje natural.
	Visualización	El objeto matemático función es interpretado mediante procesos cognitivos ligados a la visualización de sus diferentes representaciones.
Génesis instrumental	Artefactos	Se consideran artefactos simbólicos, como algoritmos que se utilizan en el proceso de construcción sin hacer ninguna conexión con la génesis discursiva donde se justifican. Se consideran artefactos digitales a programas informáticos, tales como GeoGebra o Symbolab, entre otros.
	Construcción	Consideradas como acciones que son hechas a través del uso de los distintos artefactos y sus técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial teórico	Asociados a las definiciones, propiedades o teoremas matemáticos preestablecidos. Como, por ejemplo, la definición de función como una relación que se establece entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Establecer argumentos utilizando conceptos relacionados, como por ejemplo, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente, entre otros.
	Prueba	Es necesaria una argumentación, justificación o demostración para el razonamiento discursivo, o sea pragmático, con el uso de algún artefacto digital o intelectual por medio de un razonamiento matemático (propiedad o teorema).
[Sem-Ins]	Génesis semiótica e instrumental	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: los objetos matemáticos son representados por alguno de los artefactos digitales usados en la tarea, lo cual permite su corte de palabra: visualización en distintos registros de representación semiótica.
[Sem-Dis]	Génesis semiótica y discursiva	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: la representación de las funciones es utilizada para justificar algún resultado.
[Ins-Dis]	Génesis instrumental y discursiva	Estas génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo: los artefactos digitales dan información sobre las funciones lineales y afines, la cual es usada, y en coordinación con los conocimientos previos es posible dar una respuesta.

Fuente: adaptado de Gaona *et al.* (2022).

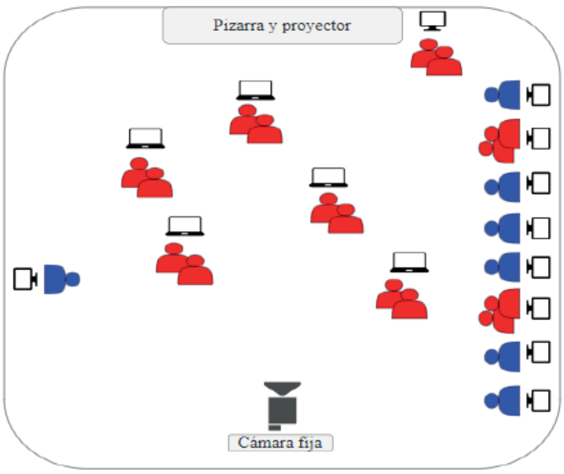
4. Resultados y discusión

Los resultados se dividen en dos partes. En la primera se muestran los resultados del trabajo individual o en duplas en la plataforma y, en la segunda, se exhiben los resultados de la discusión colectiva.

4.1 Trabajo en duplas e individual

La profesora ubica a las duplas en los computadores y notebooks seleccionados, sin embargo, algunos estudiantes prefirieron trabajar de manera individual debido a la ausencia de algunos compañeros y la disponibilidad de los computadores. De este modo, se conforman 8 duplas ($D_1,...,D_8$) y 7 individuos ($I_1,...,I_7$), utilizando 5 *notebooks* y 10 computadores de escritorio, distribuidos como se muestra en la figura 7.

Figura 7. Distribución de las duplas e individuos



Fuente: elaboración propia.

Al momento de contestar las preguntas explicitadas en la figura 4, los y las estudiantes realizan un trabajo principalmente aritmético, donde desde el lenguaje natural lo expresan mediante operatoria. Al cotizar en el salón “Arco de ensueño”, multiplican la cantidad de invitados escogidos por $30.000, algunos en calculadora y otros manualmente. Por otra parte, al cotizar en el salón “Brisas del Bosque”, se observan tres estrategias en general en el primer intento (ver tabla 2).

Tabla 2. Estrategias en el primer intento de la cotización salón "Brisas del Bosque"

Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
81·200000	28000·100+200000	28000·100
I_6 escoge 81 invitados y utiliza calculadora para la operatoria.	D_1 escoge 100 invitados y realiza cálculo mental.	D_2 escoge 100 invitados y realiza el cálculo manualmente.

Nota: se tomaron notas de campo para las estrategias.

En cuanto a los intentos de cada individuo o dupla, solo dos lograron responder correctamente en el primer intento (estrategia 2), mientras que el resto necesitó entre dos y cuatro oportunidades. Gracias a la retroalimentación de la plataforma y las consultas específicas a la profesora, los y las estudiantes logran responder efectivamente la tarea.

Durante el trabajo en la plataforma en duplas e individual no se evidencia ninguna categoría de análisis de un potencial trabajo matemático en funciones, es más bien un trabajo matemático aritmético; donde se activa la génesis semiótica al realizar la conversión de lenguaje natural a operatoria, y luego la génesis instrumental, puesto que les basta con las operaciones de multiplicación y suma para resolver la tarea. Cabe destacar que algunas duplas e individuos explicaban de manera general cómo realizaron las cotizaciones, justificando la operatoria utilizada.

Debido a que las funciones que modelan las cotizaciones se encuentran de forma implícita en la tarea, es que se promueve el trabajo colectivo donde se comparten las diferentes respuestas de los y las estudiantes, con el fin de introducir el concepto de función.

4.2 Trabajo colectivo

Esta instancia se subdivide en cinco episodios, descritos y analizados a continuación bajo el ETM.

E_1: Identificación de variables involucradas

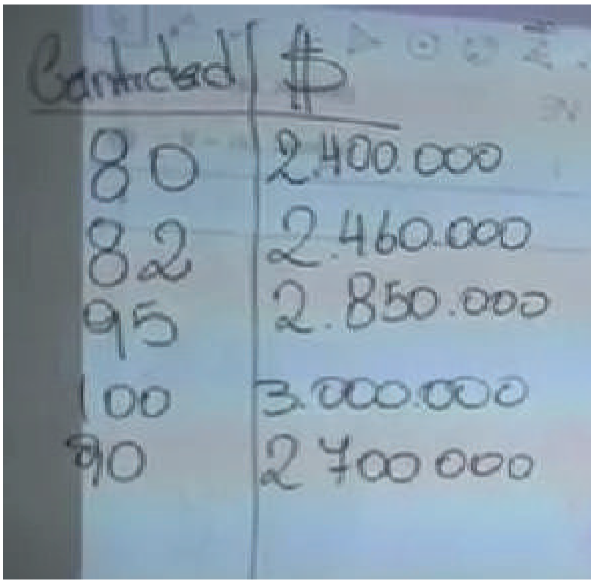
La profesora incentiva a los y las estudiantes a identificar las variables involucradas de la tarea mediante preguntas específicas. La dupla D_3 manifiesta que las incógnitas o variables son "lo que tienen que pagar y el número de personas" (V_1, 14m20s). Para poder determinar la variable independiente o dependiente, la profesora indica: "La pregunta que se tienen que hacer es: ¿La cantidad de dinero depende de la cantidad de invitados? O ¿la cantidad de invitados depende de la cantidad de dinero?" (V_1; 15m). "La cantidad de dinero depende de la cantidad de invitados", responde un integrante de la dupla D_4, y D_5 asegura que "el precio cambia según la cantidad de invitados" (V_2; 04m15s).

Dentro de este episodio se observa una argumentación respecto a cuáles son las variables involucradas, diferenciando la independiente con la dependiente. Los y las estudiantes logran establecer esta diferencia, considerando las distintas cantidades de invitados que determinó cada dupla o persona. Explicitan que el precio de cada cotización varía según la cantidad de invitados, por tanto, se activa la génesis discursiva, específicamente el referencial teórico. Esto debido a que la diferenciación de las variables independientes con las dependientes son parte de las definiciones que deben trabajar los y las estudiantes en la unidad sobre funciones.

E_2: Construcción y análisis de recta salón 1 "Arco de Ensueño".

Este episodio se enfoca en la función asociada al salón "Arco de Ensueño", recordemos que este tenía un precio fijo por persona de $30.000. La profesora invita al curso a compartir la cantidad de invitados que escogieron y el monto de la cotización. Se construye una tabla en la pizarra donde D_5, D_6, D_2, D_1 y D_7 mencionan sus resultados respectivamente obteniendo como producto la figura 8.

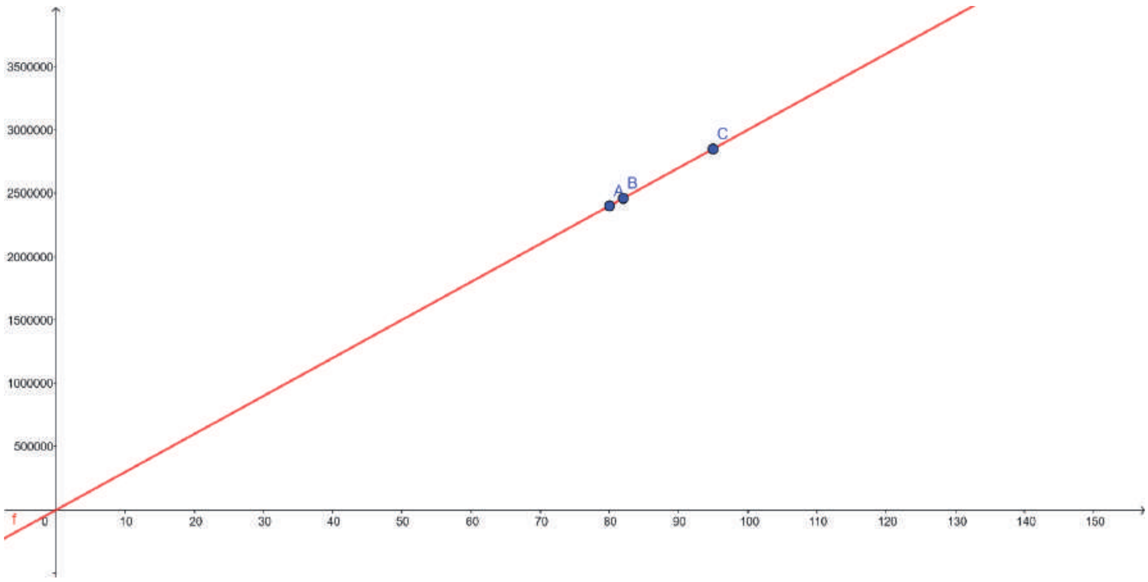
Figura 8. Tabla de valores cantidad de invitados y monto de dinero



Nota: los valores fueron determinados por los y las estudiantes.

Con estos datos los y las estudiantes expresan los valores de la tabla de valores como coordenadas, para luego trabajar la gráfica de la recta en el software GeoGebra con la información entregada por sus estudiantes. Se construye la siguiente recta como se muestra en la figura 9 y se invita a los y las estudiantes a mencionar las características que pueden observar.

Figura 9. Recta 1 "Arco de Ensueño"



Fuente: elaboración propia.

Tabla 3. Transcripción de la discusión en el episodio 2

V_1; 18m27s	D_1: *Es lineal.*
V_1; 18m39s	D_5: *Comienza en el 0.*
V_1; 18m45s	Profesora: *En el origen, ¿cómo podemos interpretar el hecho que comience en el cero? ¿Qué significa que comience en el cero?*
V_1; 18m58s	I_2: *¿El origen de la variable?*
V_1; 19m06s	Profesora: *Ya es el origen de la variable, pero ¿qué significa que las variables estén en el punto (0,0)?*
V_2; 19m10s	I_2: *Una base.*
V_2; 19m14s	D_3: *No tengo una base.*
V_2; 19m20s	Profesora: *Ya, pero recordemos las variables, cantidad de personas y dinero. Si yo les digo que estamos en el punto (0,0), ¿qué significa?*
V_2; 19m31s	I_2: *Que no hay ninguna persona y tampoco hay dinero.*

Fuente: elaboración propia.

Este episodio se caracteriza por representar la relación entre la cantidad de invitados y el precio de la cotización en una tabla de valores. Además de convertir el registro de la tabla de valores a coordenadas *(x, y)* para su representación en un plano cartesiano, se obtiene la recta mostrada en la figura 9.

Según las categorías de análisis podemos determinar que se activa la génesis semiótica, debido a que se trabaja con 3 registros. Por otra parte, se activa la génesis instrumental ya que los y las estudiantes mencionan las coordenadas de forma algorítmica (cantidad de invitados, precio). En GeoGebra observan el patrón de los puntos determinando que se puede trazar una recta, activándose el plano [Sem-Ins] debido a que mediante el artefacto digital se representa la recta.

Al momento que se les solicita caracterizar la recta se menciona que esta es lineal, sin embargo, refiere que la línea es recta, es decir, que no es curva. Por lo que se activa la génesis semiótica, específicamente una visualización icónica debido a que se interpreta el objeto mediante su gráfica. Por otra parte, se activa el plano vertical [Sem-Dis] ya que los estudiantes justifican que la recta "parte" del origen, pues al haber cero invitados existe un costo de $0.

E_3: Construcción y análisis de recta salón 2 "Brisas del Bosque"

Tras el análisis de la primera recta, la profesora se dispone a trabajar con la función asociada al salón "Brisas del Bosque". Nuevamente, invitando a los y las estudiantes a mencionar la cantidad de invitados y el monto de la cotización. Son I_6, D_2 y D_4 quienes comentan sus resultados construyendo la siguiente tabla de valores en el pizarrón como se muestra en la tabla 4.

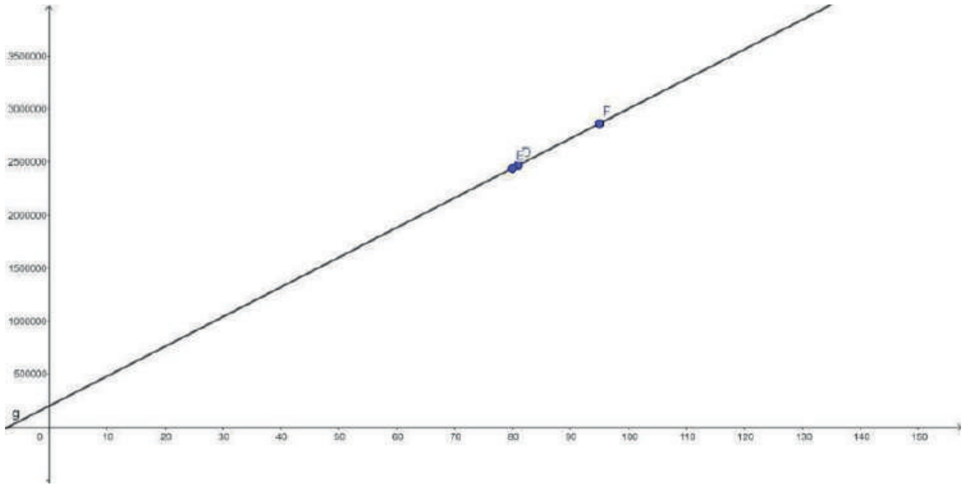
Tabla 4. Tabla de valores "Brisas del Bosque"

Cantidad de invitados	$
81	$2.468.000
80	$2.440.000
95	$2.860.000

Nota: no hay registro visual adecuado para la tabla anterior.

La profesora ingresa a GeoGeobra las coordenadas que mencionan los y las estudiantes obteniendo lo que se muestra en la figura 10.

Figura 10. Recta 2 "Brisas del Bosque"



Fuente: elaboración propia.

Tabla 5. Transcripciones del episodio 3

V_1; 21m53s	Profesora: *¿Cuál es la característica de la recta negra?*
V_1; 22m02s	*D_3: Que no empieza en el cero.*
V_1; 22m15s	*I_3: Que tiene una base fija.*
V_1; 22m22s	Profesora: *¿Qué significa que tenga una base fija?*
V_2; 15m43s	*D_4: Que empieza de los doscientos mil.*
V_2; 15m45s	Profesora: *¿Y por qué empieza de 200.000?*
V_2; 15m50s	*D_5: Porque es el precio base.*

Fuente: elaboración propia.

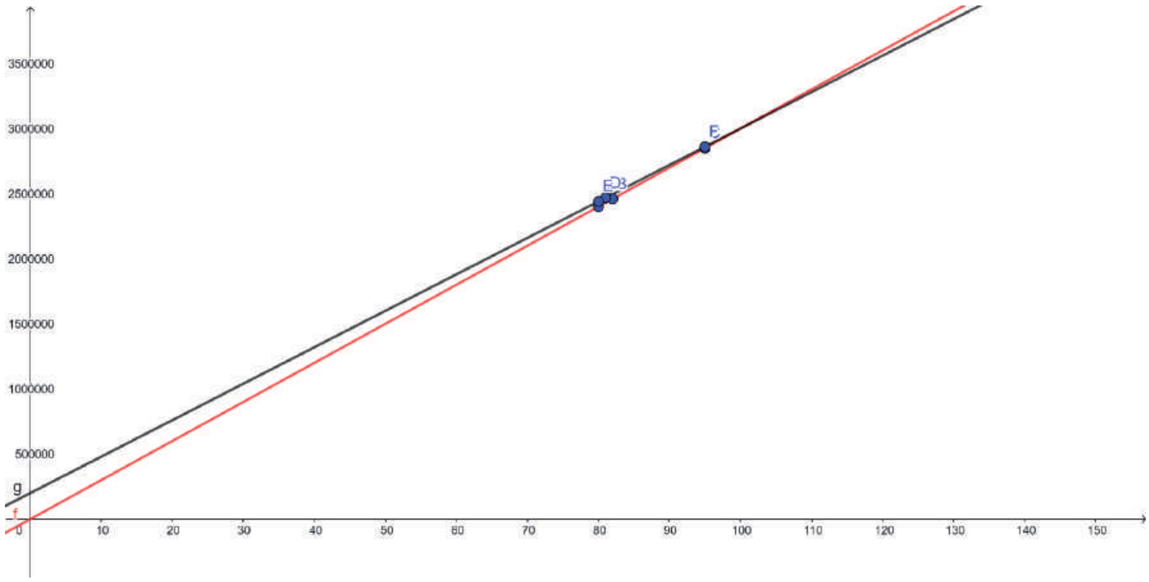
En este episodio nuevamente se activa la génesis semiótica, debido a que se hace una conversión entre registros para obtener la gráfica de la recta que modela la cotización de “Brisas del Bosque”. También, se activa la génesis instrumental al momento de mencionar las coordenadas (cantidad de invitados, precio) y el plano [Sem-Ins], ya que los y las estudiantes asumen de forma inmediata que pueden trazar una recta en GeoGebra.

Por otra parte, según se muestra en la tabla 5, se justifica que la recta comienza desde $200.000 debido a que existe un precio base, es decir, aunque existan 0 invitados solo por reservar el salón hay un monto mínimo de dinero que pagar. Esta justificación es acompañada por el registro gráfico de la recta, por lo que se activa el plano vertical [Sem-Dis].

E_4: Análisis de rectas en conjunto

Se le muestra al curso la gráfica de ambas rectas como se muestra en la figura 11, para luego analizarlas.

Figura 11. Recta 1 “Arco de Ensueño” y recta 2 “Brisas del Bosque”



Fuente: elaboración propia.

Tabla 6. Transcripciones del episodio 4

V_1; 23m28s	Profesora: *¿Qué diferencias o similitudes tienen?*
V_1; 23m32s	*D_4: Que una empieza de más arriba y que las dos van hacia el mismo lugar.*
V_1; 23m51s	Profesora: *¿Qué significa que van hacia el mismo lugar?*
V_1; 23m54s	*D_4: Que son lineales.*
V_1; 24m00s	Profesora: *¿Qué pasa cuando aumenta la cantidad de personas?*
V_1; 24m04s	*D_5: Aumenta el precio.*
V_1; 24m07s	Profesora: *¿Qué pasa cuando disminuye la cantidad de personas?*
V_1; 24m12s	*D_2: Disminuye el precio.*
V_1; 24m25s	Profesora: *¿Qué pasa cuando en "Brisas del Bosque" hay cero invitados?*
V_1; 24m32s	*I_2: No hay nada, no hay nada que pagar.*
V_1; 24m35s	*I_3: Hay una base...*
V_1; 24m40s	*D_3: Hay 0 invitados, no hay personas para invitar.*
V_1; 24m51s	*D_7: Pero hay una base de $200.000.*
V_1; 25m16s	Profesora: *Si yo simplemente quiero arrendar en "Brisas del Bosque" y no invitar a nadie, voy a tener que sí o sí pagar los $200.000.*
V_1; 25m37s	Profesora: *¿Hay algún punto en que las rectas coincidan?*
V_1; 25m39s	*I_7: ¡Sí!*

V_1; 25m41s	Profesora: *¿Cuándo coinciden?*
V_1; 25m46s	*D_8: Muy lejos.* *D_3: Más para arriba.*
V_1; 26m00s	*I_7: Coinciden en $3.000.000.*
V_1; 26m03s	Profesora: *¿Cuántas personas equivalen a ese monto?*
V_1; 26m07s	*I_7: A 100 personas.*
V_1; 26m10s	Profesora: *¿Con qué cantidad de invitados siempre me va a convenir Arco de Ensueño a diferencia de "Brisas del Bosque"? ¿En qué momento siempre va a ser más barato "Arco de Ensueño" que "Brisas del Bosque"?*
V_1; 27m10s	*I_5: Cuando sea menor a 100.*
V_1; 27m21s	Profesora: *¿Con cuánta cantidad de invitados nos conviene el local "Brisas del Bosque"?*
V_1; 27m37s	*D_3: Desde 100.*

Fuente: elaboración propia.

Para ejemplificar la situación, la docente les propone que los y las estudiantes se pongan en la situación de su gala de 8° básico, considerando que son 29 en el curso y que cada uno lleva a dos invitados. Una integrante de D_6 comenta que serían 87 invitados (V_1; 28m27s), la profesora pregunta qué opción escogerían; D_3 indica que a la opción más barata, “Arco de Ensueño” (V_1; 29m55s).

Mediante el registro gráfico los estudiantes son capaces de observar que ambas rectas “van hacia el mismo lugar” haciendo referencia implícita de la pendiente positiva de ambas. Se activa la génesis discursiva debido a que justifican mediante la proporcionalidad directa que estas rectas “van hacia el mismo lado”, es decir, que al tener más invitados más deben pagar. Cabe destacar que nuevamente se comenta que las rectas “son lineales”, haciendo referencia a que “no se doblan” y no al comportamiento lineal.

Según la tabla 6, se concluye que la recta 2 parte más arriba debido al precio base que tiene el salón “Brisas del Bosque”, activándose el plano [Sem-Dis] debido a que los estudiantes justifican el por qué la recta “parte” desde los $200.000 y no desde el origen a diferencia de la anterior.

Además, mediante la gráfica son capaces de identificar cuándo ambos salones coinciden en el mismo precio, observando con el punto en el que coinciden las rectas y otros relacionándolo con la cantidad de invitados que escogieron, en este caso 100.

E_5: Definición y tipo de funciones

Se les menciona a los y las estudiantes que hay unas características que han nombrado durante la sesión respecto a las rectas, D_3 señala que depende del punto base. Por ello, la profesora les menciona que tendrían dos tipos de rectas, una que parte en el origen y otra que tiene una base.

Tabla 7. Transcripciones del episodio 4

V_2; 24m19s	Profesora: *¿Cuáles eran las condiciones para que sean funciones?*
V_2; 24m25s	*D_3: Que la x y la y tienen que estar juntas.*
V_2; 24m28s	*D_4: La x solo puede tener una pareja.*
V_2; 24m35s	*D_5: La pareja de la x es única.*

Fuente: elaboración propia.

Se concluye que las rectas construidas corresponden a funciones, ya que cada cantidad de invitados tiene un único valor de dinero asociado, como se indica en la tabla 7. La profesora los desafía a expresar de manera general para cada salón si tienen *n* invitados (tabla 8).

Tabla 8. Transcripciones del episodio 4

V_2; 25m30s	*D_3: Sería n por 80.*
V_2; 25m46s	*I_6: Las personas por el precio.*
V_1; 26m00s	Profesora: *En este caso ("Arco de Ensueño") sería por $30.000*
V_2; 26m02s	*D_5: n por $30.000*
V_2; 26m06s	Profesora: *¿Y cómo sería en "Brisas del Bosque"?*
V_2; 26m20s	*D_3: Sería las personas por el precio por el monto fijo, no sería más $20.000.*
V_2; 26m44s	*D_5: No, más $200.000.*

Fuente: elaboración propia.

Se les vuelve a mencionar al curso que tienen dos funciones que se caracterizan por donde inicia la recta, haciendo referencia que una pasa por el origen y otra "más arriba". Se les solicita a los y las estudiantes que realicen una búsqueda en la web sobre "función lineal" y "función afín", específicamente en imágenes.

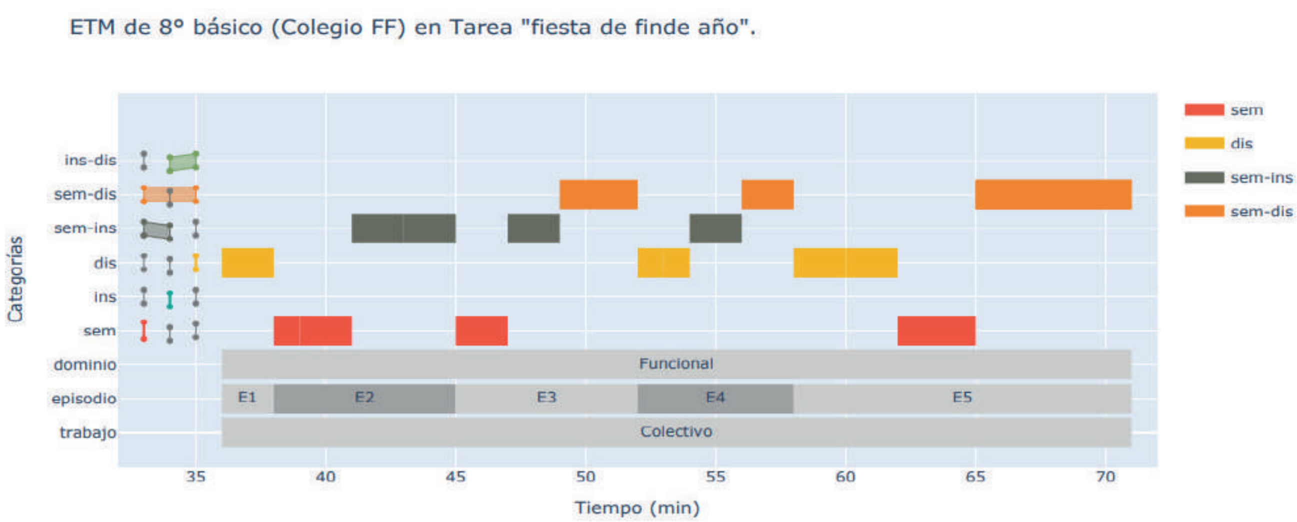
La dupla menciona que “empieza en el 0” (V_2; 25m35s), sin embargo, D_3 comenta que no comienza del 0, la docente se acerca hacia él y capta que en su búsqueda ingresó “funciones lineales” y en las primeras imágenes se mostraban funciones afines. Ahora, se les invita a ingresar “función afín” en la búsqueda. D_8 lee una definición que encuentra en donde menciona la expresión algebraica *f(x)=mx+b*.

Se activa la génesis discursiva ya que justifican que las rectas son funciones, debido a que cumplen con la condición de unicidad. Por otra parte, al momento de generalizar las cotizaciones de ambos salones se activa la génesis semiótica pues realizan una conversión del lenguaje natural al algebraico. Además, mediante el registro gráfico los y las estudiantes concuerdan en que existe una diferencia entre ambas y está relacionado con el precio base, en sus palabras “de donde parten” las rectas.

Al momento de solicitar que utilicen el buscador web para ver imágenes de función lineal y afín, se activa el plano [Sem-Dis] debido a que los estudiantes utilizan la representación gráfica para relacionar qué recta es lineal y cuál es afín, destacando que las funciones lineales “parten” desde el origen y las afines no. Concluyen que la cotización de “Arco de Ensueño” corresponde a una función lineal porque no tiene base y “Brisas del Bosque” a una función afín ya que tiene una base.

En resumen, la figura 12 muestra la activación de génesis y planos verticales en cada episodio detallado y la tabla 9 la cantidad de intervenciones que tuvo cada dupla e individuo en el trabajo colectivo.

Figura 12.



Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. Cantidad de intervenciones en el trabajo colectivo de cada dupla e individuo

Duplas	Intervenciones	Individuos	Intervenciones
D_1	4	D_1	1
D_2	4	D_2	4
D_3	16	D_3	2
D_4	6	D_4	0
D_5	3	D_5	1
D_6	1	D_6	3
D_7	2	D_7	3
D_8	4		

Fuente: elaboración propia.

En el trabajo colectivo se evidencia la importancia del rol de la profesora para que el concepto de función emerja. La profesora al reunir las distintas respuestas de los y las estudiantes permite que la covariación entre las variables involucradas aparezca. La profesora debe estar atenta a las diferentes interpretaciones de los y las estudiantes para que la discusión se centre en aspectos epistemológicos de los objetos involucrados. Las soluciones puntuales y aritméticas se transforman en una covariación al utilizar el registro tabular, luego, al utilizar el registro gráfico pueden visualizar un objeto específico; en ambos casos se está "modelando" la situación mediante estos dos registros y solo al final, después de haber analizado estos registros, se trabaja con la representación algebraica.

En términos del ETM, la figura 12 muestra la variedad del trabajo desplegado. En la primera parte, en el trabajo individual y en duplas, se observa un trabajo principalmente semiótico e instrumental, pero en el dominio de la aritmética. En cambio, en el trabajo colectivo, además de cambiar de dominio, aparecen la génesis y un plano asociado a lo discursivo. Aunque, como es una tarea de introducción, esta dimensión aparece entrelazada con las dimensiones instrumentales y semióticas.

7. Conclusiones

En la revisión bibliográfica de las investigaciones sobre evaluación en línea en matemática, se constata que existen pocas donde se discutan elementos epistemológicos en experimentaciones donde participen estudiantes de nivel secundario. Además, se observa que los sistemas de evaluación en línea suelen presentar tareas cerradas, es decir, con una única respuesta. Sin embargo, recientemente han comenzado a incorporar tareas abiertas, las cuales permiten múltiples o infinitas soluciones posibles. Este cambio refleja la evolución tecnológica de estos sistemas y el avance en la investigación en el área, pasando de preguntas cerradas de selección múltiple y respuestas únicas a preguntas abiertas, como las presentadas en este estudio.

La investigación se centró específicamente en comprender el trabajo matemático de estudiantes de 8° básico cuando resolvieron una tarea abierta introductoria al concepto de funciones en una plataforma de evaluación en línea. El ETM (Kuzniak *et al.,* 2022) permitió analizar el trabajo personal y colectivo en entornos virtuales, proporcionando una comprensión detallada de cómo interactúan con la tecnología, abordan las tareas y activan diferentes génesis y planos verticales.

Al implementar la tarea "Fiesta de fin de año" se logran identificar dos fases: en la primera, el trabajo es individual o en duplas y, en la segunda, el trabajo es colectivo. Los análisis revelaron que los y las estudiantes realizan un trabajo matemático diverso y enriquecido, especialmente en la discusión colectiva, donde se construyen los conceptos de función lineal y afín.

En términos del marco teórico podemos decir que activan las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva, y que estas operan, en algunos casos, de forma simultánea en los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo. Cabe destacar el rol de la docente para movilizar la génesis discursiva en el trabajo colectivo, lo que no se observa en el trabajo personal o en duplas.

La génesis semiótica fue trabajada principalmente en la conversión de registros, la instrumental en la utilización de algoritmos y artefactos digitales para mencionar y ubicar coordenadas, por último, la dimensión discursiva en la justificación mediante propiedades de funciones. En cuanto a los planos verticales activados, se observó que el plano semiótico-instrumental fue trabajado en la representación de rectas mediante el artefacto digital GeoGebra, y el plano semiótico-discursivo principalmente en la justificación acompañada de registros gráficos.

Respecto al rol de los artefactos tecnológicos se pueden mencionar dos aspectos. El primero es el trabajo individual o en duplas en la plataforma que permitió a los y las estudiantes verificar y corregir sus respuestas, lo que a su vez les permitió tener respuestas para aportar en la discusión colectiva. Por otra parte, en el trabajo matemático colectivo el uso de GeoGebra permitió la visualización de las funciones que modelan la cotización de salones. Esto facilitó la comprensión de los y las estudiantes al poder relacionar sus resultados del cálculo aritmético con el comportamiento de las rectas asociadas.

Con relación al trabajo personal y colectivo, los y las estudiantes, mediante la tarea abierta, proporcionan múltiples respuestas que, en conjunto con las interacciones con la docente, los intercambios de ideas y explicaciones, permiten la construcción del concepto de función. Esta instancia de colectividad propicia la reflexión y motiva la activación de distintas génesis y planos verticales, destacando la génesis discursiva debido a su importancia en la comprensión del objeto. Este trabajo colectivo es un aspecto esencial de una sala de clases, que muchas veces es dejado de lado cuando se trabaja con tecnología porque se propicia principalmente el trabajo personalizado e individual.

Es destacable cómo el ETM ofrece herramientas para analizar el trabajo matemático de los estudiantes en la plataforma de evaluación en línea. De hecho, proporciona una comprensión detallada de cómo los y las estudiantes interactúan con entornos tecnológicos, abordan las tareas activándose distintas génesis y planos verticales.

7. Referencias bibliográficas

Armas, T. A. De. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Cambridge Assessment International Education (2019). ¿Qué significa Evaluación para el Aprendizaje? Recuperado de: https://www.cambridgeinternational.org/Images/579619-assessment-for-learning-spanish-.pdf

Castro, C. y Moraga, A. (2020). *Evaluación y retroalimentación para el aprendizaje*. Mineduc. https://educacionsuperior.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/49/2020/04/6-Modelo-Evaluacion-y-retroalimentacion-aprendizajes.pdf

Cuesta, A., Deulofeu, J. y Méndez, M. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática, 22(3), 5-21*. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a2.pdf

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Editorial Peter Lang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME, 17*(1), 143-168. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Escorcia, E. y Riveros, V. (2021). Estrategia TIC para enseñar la función lineal en estudiantes universitarios. *Boletín Redipe, 10*(9), 413-429. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114575

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas*. [Université Sorbonne Paris Cité]. https://theses.hal.science/tel-02458946/

Gaona, J., López, S. y Delgadillo, E. M. (2022). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.00407

Gaona, J., López, S. y Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(9), 1-30. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Gaona, J. y Menares, R. (2021). Argumentación de futuros profesores de matemáticas en tareas sobre fracciones mediadas por un sistema de evaluación en línea con feedback automático. *arXiv*. https://europepmc.org/article/ppr/ppr386985

Gaona, J., Palacios, C. B. y Sánchez, L. (2024). Táches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'etm collectif. *Actes Du Huitième Symposium d'Étude Sur Le Travail Mathématique.*

Gaona, J. y Palacios, M. (2023). Prácticas evaluativas de profesores de matemáticas durante la pandemia. *Revista Chilena de Educación Matemática, 15(1)*, 3-14. https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i1.123

Gaona, J. y Vivier, L. (2022). Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas. *REMATEC, 17*(42), 111-138. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Kuzniak, A., Richard, P. y Montoya-Delgadillo, E. (2022). Mathematical Work in Educational Context. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Ledezma, C., Ramos-Rodríguez, E. y Vásquez, P. (2018). Propuesta de enseñanza para la conversión de registros en el tratamiento de las funciones lineales y afines. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 183-191. http://funes.uniandes.edu.co/13503/1/Ledezma2018Propuesta.pdf

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21,* 308-318. http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf

Luz, Y. y Yerushalmy, M. (2019). Students' conceptions through the lens of a dynamic online geometry assessment platform. *The Journal of Mathematical Behavior*, *54*, 100682. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.001

Menares Espinoza, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol. 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4(I)), 181-197. https://doi.org/10.12802/relime.13.1749

Moreno, T. (2016). *Evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje. Reinventar la evaluación en el aula (1st ed.). Universidad Autónoma Metropolitana.* https://www.casadelibrosabiertos.uam.mx/contenido/contenido/Libroelectronico/Evaluacion_del_aprendizaje_.pdf

Olsher, S., Chazan, D., Drijvers, P., Sangwin, C. y Yerushalmy, M. (2024). Digital Assessment and the "Machine." En B. Pepin, G. Gueudet, y J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1175-1201). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_44

Organización de las Naciones Unidas para la Educación (2017). *Evaluación del aprendizaje en la UNESCO: Garantía de un aprendizaje efectivo y relevante para todas las personas.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000260325_spa/PDF/260325spa.pdf.multi

Palacios, C. (2023). *Análisis del espacio de trabajo matemático de estudiantes de 8° básico en funciones a través de tareas en un entorno tecnológico.* [Tesis magíster]. Universidad de Playa Ancha.

Rodríguez, H. y Salinas, M. (2020). La Evaluación para el Aprendizaje en la Educación Superior: Retos de la Alfabetización del Profesorado. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 13*(1), 111-137. https://doi.org/10.15366/riee2020.13.1.005

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford Press.

Stacey, K. y Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 721-751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23

Yerushalmy, M. y Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM - Mathematics Education, 52*(5), 1033-1049. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01134-0

UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 25-06-24 | Aceptado: 29-11-24 | Publicado: 20-12-2024

PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LA HISTORIA Y SU SENTIDO FORMATIVO. UN ESTUDIO DE CASO EN CIUDAD DE MÉXICO

HISTORY TEACHING PRACTICES AND THEIR FORMATIVE MEANING. A CASE STUDY IN MEXICO CITY

ESTUDIO

LAURA MACRINA GÓMEZ ESPINOZA
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad de México, México
lmacrina@yahoo.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8262-0489

KAREN IVONNE JIMÉNEZ ARREOLA
Universidad del Valle de México/Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México
kariv.ja@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2963-1618

ROXANA LILIAN ARREOLA RICO
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad de México, México
roxarreola@yahoo.com.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3779-1788

Resumen

La investigación analiza el sentido formativo de la enseñanza de la historia desde la perspectiva de docentes de nivel medio superior (que en México corresponde al periodo de estudios previo a los estudios universitarios) a partir de la identificación de estrategias educativas utilizadas, su intencionalidad y alcances. Para ello, se diseñaron instrumentos que recuperan información sobre las prácticas docentes; el análisis de los datos recabados se realizó desde una aproximación metodológica cualitativa y cuantitativa que permitió indagar si se trasciende la memorización de datos y, en su lugar, se promueve el desarrollo del pensamiento y conciencia históricos en los educandos, mediante el análisis de sucesos históricos para la comprensión del contexto. El estudio pretende posibilitar un mayor conocimiento sobre el origen de algunas dificultades para el aprendizaje y la motivación de la disciplina, así como los aspectos que inciden en los procesos formativos en casos situados en México. Entre los hallazgos se identifica que los docentes trascienden prácticas tradicionales y otorgan un sentido de formación orientado a construir en el estudiante una conciencia histórica que les permita asumirse como sujetos históricos con una actitud crítica ante la sociedad y el mundo, lo cual posibilitará nutrir la enseñanza de la historia en los distintos niveles de educación y generar propuestas orientadas a la intervención.

Palabras clave: Enseñanza de la historia, pensamiento histórico, conciencia histórica, docentes de educación media superior.

Abstract

The research sought to analyze the formative meaning of teaching History by identifying the intentionality, scope and educational strategies used, from the perspective of high school teachers (which in Mexico corresponds to the period of studies carried out prior to university studies). For this purpose, instruments that analyzed teaching practices were designed; the analysis of the data collected was carried out from a qualitative and quantitative methodological approach that allowed to investigate whether the memorization of data is transcended and, instead, the development of historical thinking and awareness in students is promoted, through the analysis of historical events to understand the context in which they live. The study aims to enable greater knowledge about the origins of some difficulties in the learning and the motivation of the discipline, as well as the aspects that affect the formative processes in a Mexican case. Among the findings, it is identified that teachers transcend traditional practices and provide a developmental sense aimed at building in the students a historical consciousness that allows them to assume themselves as historical subjects with a critical attitude towards society and the world, which would make it possible to nourish the teaching of History at different levels of education and generate proposals aimed at intervention.

Keywords: History teaching, historical thought, historical consciousness, professors of higher and middle education levels.

1. Introducción

Un importante reto actual de la educación global es formar personas reflexivas y críticas que tomen decisiones informadas. Una manera de aportar a ello es desarrollar la capacidad del educando de generar conocimiento e identificar los procesos históricos, transmitirlos y conseguir que la sociedad se determine a adoptar decisiones en su vida diaria (Gómez, Ortuño y Molina, 2014). En ese sentido, se debería rechazar el modelo de enseñanza-aprendizaje de la Historia tradicional construido sobre "una memoria colectiva homogénea que fue transmitida vía escolar, a través de procedimientos cognitivos básicos sustentados en la memorización acrítica de la información y anclajes emocionales ligados a la defensa de la nación como referente único de identidad" (Ibagón, 2023, p. 2), con el que el saber histórico buscaba definir y clasificar la realidad pasada como futura, anclarla y fijarla, con límites sólidos e inamovibles, dejando fuera lo que fuese diferente. Lo que se pretendía era que el estudiantado aprendiera de memoria tales sucesos históricos bien enmarcados, sin crítica ni diversidad de por medio. Tras los dos conflictos bélicos mundiales del siglo XX, diversos académicos y especialistas se dedicaron a buscar formas diferentes de enseñar Historia y construir pensamiento histórico.

Por ejemplo, desde la Escuela de los Annales, Marc Bloch, Lucien Febvre o Pierre Vilar se dedicaron a reflexionar sobre 'el oficio del historiador' y el 'pensar históricamente'. Esto último implicaría ubicar a un hecho o evento espaciotemporalmente, evaluar y estimar significados e impactos de dichos sucesos en el tiempo, y datar o crear cronologías de tales acontecimientos (Vilar, 2001). De tal manera, el conocimiento histórico residiría en comprender los 'fenómenos sociales en la dinámica de sus secuencias'. Es decir, la capacidad de vislumbrar e interpretar cualquier acto humano, o referente a ello, dentro de su complejidad de interrelaciones y encadenamientos con factores sociales, políticos, económicos, culturales y ambientales. Esto implicaría un 'esfuerzo de síntesis' de muchos conocimientos por parte de los historiadores. De forma que "sólo una historia comparada y total (economía, sociedades, y civilizaciones) es el instrumento adecuado para describir los procesos, y poner a prueba los modelos, para distinguir en las múltiples combinaciones entre lo viejo y lo nuevo, lo que es promesa, lo que es amenaza" (Vilar, 2001, p. 52).

En pleno siglo XXI, con un mundo profundamente globalizado e interconectado, este estudio se interesa por indagar las prácticas educativas de la Historia, de nivel medio superior (que corresponde al periodo de estudios que se realiza previo a los estudios universitarios), buscando identificar el sentido que se da a las prácticas docentes de la asignatura, y analizarlo a la luz de orientaciones educativas centradas en un enfoque crítico reflexivo que favorezcan la construcción de conciencia histórica, permitiendo así afrontar los desafíos de las realidades contemporáneas. Que "el aprendizaje histórico se convierta en una herramienta de empoderamiento social y cultural" (Ibagón, 2023, p. 8). Es pertinente clarificar que "saber historia no es lo mismo que ser educado históricamente" (Ibagón, 2023, p. 4). Es decir, conocer los datos de la historia de la humanidad de una forma enciclopédica no garantiza un pensamiento histórico que haga algo con esos datos, a nivel tanto cognitivo como material.

El pensamiento histórico asegura cuestionar, debatir, significar y proponer respuestas derivadas de distintas 'huellas' del pasado. Sobre esto, Peter Seixas y Tom Morton (2012) plantean que el pensamiento histórico es el proceso creativo mediante el cual se interpreta y significa la evidencia que queda del pasado, para generar narrativas sobre la historia. Señalan que las formas de comprender las relaciones entre pasado, presente y futuro van a ser distintas de un lugar y tiempo a otro.

Particularmente, Alvén (2021) define los componentes cognitivos del pensamiento histórico, recuperando la catalogación de conocimientos de primer y segundo orden, así como proponiendo otros de tercer orden. Indica que los conocimientos de primer orden corresponden a hechos, datos, conceptos de contenido; mientras que los de segundo orden permiten la interpretación, estructuración y significación de dichos datos, nombres, fechas, entre otros. De tal suerte que los conocimientos de primer orden son sustantivos mientras que los de segundo orden son epistemológicos. Los de tercer orden serían ontológicos, pues "arrojan luz sobre quiénes somos, qué es importante para nosotros y hacia dónde nos dirigimos" (p. 254).

Álvarez (2021) explica que los conocimientos de primer orden están relacionados con la memorización, asimilación y dominio literal de datos concretos como pueden ser fechas, nombres, lugares, eventos, conceptos, ideas o principios generales, axiomas. También integra seis conceptos fundamentales de segundo orden del pensamiento histórico (Álvarez, 2020) que recupera de los estudios de Seixas y Morton, a saber: "fuentes históricas, tiempo histórico, relevancia histórica, causas y consecuencias, empatía histórica, y dimensión ética" (p. 445).

Estos seis conceptos de segundo orden, con sus tensiones y dificultades, enriquecen el pensamiento histórico. Al respecto, Seixas y Morton (2012) señalan que cada uno responde a preguntas que permiten ordenamiento y explicación de acontecimientos pretéritos. Por ejemplo, la relevancia histórica busca dar respuesta a cómo decidimos qué es lo importante de conocer del pasado; las fuentes históricas responden a cómo sabemos lo que sabemos del pasado; la apreciación y explicación de los cambios y las continuidades, es decir, del tiempo histórico, busca aclarar cómo podemos darle sentido al complejo flujo de los sucesos históricos; la causalidad histórica pretende esclarecer por qué suceden los eventos y cuáles son sus impactos y así explicar las interacciones entre la agencialidad humana y las condiciones preexistentes que configuran los sucesos históricos; la empatía histórica responde a cómo podemos entender de mejor manera a las personas del pasado, tratando de evitar el presentismo; y finalmente, la dimensión ética del pensamiento histórico procura responder cómo puede la Historia ayudarnos a vivir en el presente.

Finalmente, Alvén (2021) propone tres conceptos constituyentes del conocimiento de tercer orden: conciencia histórica, cultura histórica y uso (y abuso) de la historia. El primero, implica la capacidad humana de pensar e interpretar distintas dimensiones temporales, así como los actos individuales y colectivos realizados en estas. La cultura histórica es el campo en el que se comunica la narrativa histórica: aquí interesarían no solo aquellas narrativas que se aceptan y que se rechazan, sino también medios, consumo y recepción de ellas. Finalmente, del uso (y abuso) de la historia resalta su conexión con el presente y el mundo contemporáneo. Es decir, siempre se mira al pasado desde el presente y con una idea del futuro. Concebir así el pensamiento histórico permitiría dinámicas de enseñanza-aprendizaje que empoderaran a los aprendices de Historia, pues propiciaría el descubrimiento de nuevas formas de entender las realidades y a sí mismos, la participación en discusiones y debates actuales con mayor criterio y argumentación.

Sobre la conciencia histórica, Fronza (2015) plantea que esta engloba distintos procesos mentales que “a través de la subjetividad humana, organizan las experiencias históricas del proceso, interpretaciones y formas de sentido del tiempo de orientación para la praxis vital de los sujetos históricos” (p. 79). Esos procesos mentales son la experiencia, interpretación, orientación y motivación, que estructuran la formación de la identidad histórica del sujeto en relación con el otro, el tiempo y el espacio. Así, en la conciencia histórica los procesos antes descritos se sintetizan.

Alvén (2021) rescata ideas de Gadamer (2006) y Ricoeur (1998) de conciencia histórica para plantear que el ser humano es y hace historia. Cuando señala que el ser humano es histórico, se refiere a que tiene historicidad, existe en el tiempo y navega a través del pasado, presente y futuro de forma física y cognitiva. Al referir que el ser humano hace historia contempla la toma de conciencia sobre su propia historicidad y la capacidad agencial y de emancipación de estos. Para Zrudlo (2022) cada persona tiene su propia conciencia histórica, sea articulada o no, la cual está conformada e influenciada por numerosos elementos contextuales y culturales; así, la escuela y la enseñanza de la Historia se constituyen como factor importante que moldea y estructura la conciencia histórica, en una dimensión tanto personal como comunitaria. Además, plantea una pregunta provocadora y desafiante: ¿qué forma de conciencia histórica deberían fomentar las escuelas en los estudiantes? La importancia del cuestionamiento es evidente, sin embargo, más allá de presentar una única forma de conciencia histórica ideal por enseñar, en este trabajo nos preguntamos: ¿qué formas de conciencia histórica se han fomentado desde las escuelas y a través de qué prácticas docentes?

Destacamos que la Historia como disciplina enseñada ha seguido ampliamente un modelo transmisionista fundado en la retención y repetición de información de un relato lineal, en el que el contenido científico y pedagógico se transmite por los docentes, siendo suficiente para el ejercicio de su profesión, dominar los conocimientos disciplinares y científicos a enseñar (Pereira, citado en Fronza, 2015). Tales prácticas educativas han propiciado en el estudiantado una apreciación desfavorable sobre la asignatura de Historia, quienes la miran aburrida e infructuosa, meramente memorizando fechas y datos de personas o lugares (*e. g.* Barca, 2011; Barton, 2010; Gómez y Miralles, 2015), pidiéndoles plasmarlos en exámenes sin esfuerzo por significar tal información.

Se han generado propuestas alternativas (Carretero y López, 2009), enfatizando la construcción del pensamiento histórico, favoreciendo en los estudiantes la representación del pasado desde un pensamiento crítico y reflexivo, de manera que los docentes propician la participación activa dando lugar a aprendizajes significativos; considerando que el pensamiento crítico conforma habilidades intelectuales superiores que se deben fortalecer en los estudiantes. Las investigaciones de estos autores se centran en didácticas que favorecen el aprendizaje del pensamiento histórico, mediante análisis, reflexión, valoración e interpretación de documentos. Después de todo, la existencia humana es temporal, se nace en una fecha específica con la noción de que esa vida va a terminar en un momento determinado. Similarmente, las sociedades surgen, se transforman y en ocasiones colapsan, dando pie a coyunturas, épocas, periodos. El devenir de los individuos y sus relaciones con otros y su entorno, son concientizados y estructurados a través del pensamiento histórico, lo cual debería favorecerse mediante la enseñanza de la historia.

Consecuentemente, enseñar Historia es más necesario para desarrollar en los educandos un criterio y visión crítica del presente (Prats y Santacana, 2011), recurriendo a situaciones didácticas diversificadas que posibiliten desarrollar diversas habilidades intelectuales y potenciar el desarrollo personal. Por tanto, es indispensable asignarle a la Historia un lugar ponderado en el currículo educativo.

2. Marco de referencia

Enseñar historia requiere del profesor la descentración de prácticas educativas focalizadas en la repetición y memorización, para asumirse como mediador que lleve al estudiante a un conocimiento histórico vinculado a su vida cotidiana, implicando propuestas didácticas activas y participativas desde un enfoque crítico reflexivo (Cortes, Daza y Castañeda, 2019; Madariaga y Schaffernicht, 2013). También propiciar en la clase la comunicación oral y destrezas analíticas referidas a aspectos geográficos y cronológicos para desentrañar el sentido de los sucesos históricos (López, Miralles, Prats y Gómez, 2017; Meneses, González-Monfort y Santisteban, 2019; Sánchez y Colomer, 2018).

En la asignatura que nos ocupa, "el pensamiento histórico sería el proceso creativo que realizan los historiadores para interpretar las fuentes del pasado y generar narrativas históricas" (Seixas y Morton, citado en Sáiz y Gómez, 2016, p. 177). No se pretende que los estudiantes sean especialistas, sino que aprendan a utilizar determinadas formas de pensamiento histórico y geográfico para hacer comprensible su mundo (Wineburg, citado en Gómez, Rodríguez y Miralles, 2015).

Chávez y Meneses (2022) mencionan que investigaciones recientes evidencian que el tipo de aprendizaje de la historia que se promueve en las aulas no permite al estudiante desarrollar el pensamiento y conciencia histórica; por el contrario, se corrobora que se han perpetuado las prácticas de modelos tradicionales a lo largo del tiempo y que la enseñanza de la disciplina tiende a replicar las características de la vieja historia. Al respecto, Vansledright (2009, citando en Chávez y Meneses) observó en aulas estadounidenses y canadienses que "el profesorado tiende a estar de pie explicando los contenidos, mientras que los estudiantes escuchan de forma pasiva" (p. 3); asimismo, González y Gárate (2017, citados en Chávez y Meneses) llevan a cabo una investigación en la que "el alumnado señala que las prácticas habituales se centran en leer libros de texto y escuchar al profesor" (p. 3).

No obstante, Sáiz y Colomer (2014) previamente planteaban que las prácticas docentes proponían una enseñanza de la Historia apegada al manual escolar, siguiendo la "presentación de conceptos, aclaración de lenguaje, comentarios, preguntas, síntesis, tareas escritas" (p. 2). Conllevando a que se privilegie en la evaluación escolar "la repetición acrítica de hechos, fechas y conceptos del pasado" (Gómez, Rodríguez y Miralles, 2015), basada en una narración lineal y simple de hechos pretéritos. Consecuentemente, la metodología de enseñanza que se asuma será la que defina el procedimiento de evaluación (Gómez y Miralles, 2015), y suele priorizarse, valorar el conocimiento de datos precisos y la memorización de acontecimientos sucesivos, sin discernimiento de las relaciones explicativas entre los mismos. Aunado a esto, en ocasiones "el profesorado presta más importancia a la cantidad de información que a la calidad" de la misma (Ortuño, Gómez y Ortiz, 2012, p. 59).

Aunque desarrollar el pensamiento histórico se ha reconocido como fundamental al actualizar la manera de enseñar Historia, para Álvarez (2020) es insuficiente la evidencia de didácticas y valoraciones específicas orientadas a este fin. Recientemente, Chávez (2024) propuso un modelo para contribuir al desarrollo del pensamiento histórico en el profesorado en formación y en ejercicio, sin embargo, aún se requiere mayor trabajo en el desarrollo de didácticas específicas dirigidas a estudiantes de educación básica y media en las que los estudiantes se reconozcan como seres históricos, dejen de ser espectadores y se involucren de manera activa.

A la historia se le ha adjudicado la función social de formar una identidad ciudadana, para ello se le ha utilizado de diversas formas. La representación del pasado ha permanecido en la cotidianidad de los individuos de manera omnipresente, haciendo prevalecer dicho pasado a través de museos, héroes y vestigios. De acuerdo con Carretero (2007), existen tres representaciones del pasado: la primera referida al registro de la historia en la escuela, la segunda, la historia cotidiana como elemento de la memoria colectiva y la tercera representación desde la historia académica. Asimismo, señala que la enseñanza de esta disciplina ha propiciado una connotación emotiva vinculada a los símbolos y relatos de la identidad nacional en detrimento del pensamiento crítico, donde se da prioridad a determinada información como hechos, fechas y personajes de manera memorística para delinear un perfil identitario de los ciudadanos desde los primeros años de vida, mediante la trasmisión de valores, como la lealtad, la estandarización de una lengua y el patriotismo, que en efecto contribuyen a moldear un prototipo de ciudadano.

Prats y Santacana (2011) plantean cinco funciones sociales de la historia a incluirse en las evaluaciones: función patriótica de refuerzo del sentimiento de autoestima de un colectivo; función propagandística de lanzamiento de mensajes positivos sobre un régimen o sistema políticos o sociales; función de la Historia como afirmación de superioridad cultural, que consiste en introducir ideas o sistemas ideológicos; función para el ocio cultural; y función para la creación de conocimiento científico en el análisis social.

Visto así, los fines de enseñar Historia conforme Prats y Santacana (2011) son facilitar la comprensión del presente, contribuir a desarrollar las facultades intelectuales, enriquecer otros temas del currículo y estimular las aficiones para el tiempo libre, así como ayudar a adquirir sensibilidad social, estética y científica. López, Veliz y Márquez (2023) relevan favorecer la conformación de una imaginación y empatía históricas. La primera se trata de una herramienta para contextualizar e imaginar el pasado y eventos pretéritos, advirtiendo utilizarse de manera consciente y responsable, desde un presente específico con sus propios juicios y valores. Mientras que la empatía histórica es la capacidad de percibir y asimilar las actitudes, decisiones, motivaciones de los actores históricos, aunque en el presente puedan resultar extrañas, erradas o absurdas.

Para demostrar que la Historia es socialmente útil para la vida cotidiana del estudiantado, Álvarez (2020) plantea el desafío en su enseñanza, de "transitar, desde un paradigma tradicional a uno constructivista e innovador, que apueste por el desarrollo del pensamiento histórico en el alumnado" (p. 442). Arguye que es mediante la utilización del conocimiento histórico, sus procedimientos disciplinares, más las actitudes correspondientes, lo que llevará a formar ciudadanos críticos, solidarios y capaces de desplegar propios argumentos basados en evidencias fehacientes; en eso habría de centrarse el profesorado.

Álvarez (2020) concluye que primero el docente revise críticamente los enfoques pedagógicos y disciplinares desde los cuales desarrolla sus clases. Luego, propicie que los estudiantes conformen una conciencia sobre la manera en que la Historia se construye como la disciplina que es, haciendo despliegue amplio de actividades diversas en la clase. Explica que posteriormente el docente requiere transmitir emoción, confianza y cercanía, desarrollando proximidad en sus estudiantes, para propiciar mayor gusto por la disciplina y combatir visiones negativas que tengan. Finalmente, que aborde discusiones y análisis de temáticas controversiales y socialmente vigentes en el entorno del estudiantado, que resulten en aprendizajes verdaderamente significativos.

Álvarez (2020) en su investigación a partir de la revisión documental exploratoria ya anticipa la relevancia de mejorar la enseñanza de la historia, destacando la escasa presencia de formar sobre técnicas y estrategias, poniendo énfasis en propuestas para aportar en la formación profesional de los docentes, ofreciendo referentes metodológicos que se pueden emplear en las clases de historia. En Álvarez (2023) lleva a cabo una investigación documental exploratoria basada en el análisis descriptivo-argumentativo de artículos científicos y libros especializados de Latinoamérica, España e Italia, principalmente, y a partir de ella fundamenta la relevancia del desarrollo del pensamiento histórico en la formación del profesorado de historia, mediante la cual se permite prepararlos como profesionales altamente competentes para formar nuevas generaciones de estudiantes como ciudadanos críticos, rigurosos y responsables de su propio devenir.

Lo anterior implica transformar los objetivos formativos de la asignatura de historia, para dejar de ser tradicional, de manera que su propósito no sea dominar aprendizajes de primer orden como fechas, personajes y acontecimientos. Por el contrario, busque el desarrollo del pensamiento histórico de los estudiantes, para que sean constructores de una sociedad democrática e inclusiva.

Un reciente estudio (Rivero, Aso y García-Ceballos, 2023) sostiene que en las clases de historia en el nivel de secundaria y bachillerato es incipiente la implementación de procesos de pensamiento histórico. Es decir, actualmente en la educación se requiere que se desarrollen destrezas, competencias y estrategias para comprender la historia a través de un modelo de pensamiento histórico y dar significado a sus contenidos.

Como docentes, habría que promover a los estudiantes la identificación de las problemáticas actuales y sus propios procesos históricos, posibilitando su visualización y optar por mejores resoluciones al establecer relaciones creativas basadas en sucesos pretéritos. Para Sánchez (2000), "la conciencia histórica permite al individuo utilizarla para intervenir en la transformación de la sociedad" (p. 7), ya que solamente cuando se comprende el tránsito temporal de los hechos históricos pueden dimensionarse con mayor exactitud y posibilitar un claro entendimiento de sus procedencias, relaciones y derivaciones. Con ese ordenamiento cognitivo, la implementación y aplicación de respuestas, soluciones y posicionamientos políticos frente al devenir de la existencia humana se vuelve más plausible.

En esta dirección, las acciones docentes no deberían priorizar el conocimiento factual con predominio memorístico (Gómez y Miralles, 2015), aspectos que regularmente constituyen la evaluación de conocimientos en las clases de Historia, restando espacio a contenidos procedimentales y destrezas estratégicas. Gómez, Ortuño y Molina (2014) plantean como reto “conseguir organizar una enseñanza de la historia en la que se conjugue la necesidad de conocer tanto los contenidos generados desde la larga tradición científica como la de profundizar en los procesos propios del historiador” (p. 10). Explican que “saber trabajar con interpretaciones en lugar de certezas implica desarrollar un pensamiento crítico sobre las diferentes formas en las que los grupos humanos perciben los ritmos de cambios y permanencias a lo largo del tiempo” (p. 10). Asimismo, aclaran que no se busca hacer historiadores a los estudiantes sino que, al pensar históricamente y comprender la Historia, puedan valorar tanto los sucesos pretéritos como presentes, y analizar críticamente las argumentaciones sobre individuos, sociedades y eventos del pasado, para entonces poder ser empáticos con las diferencias, afrontar los problemas sociopolíticos de manera consciente, y tomar decisiones y actitudes que promuevan la solución antes que la complicación, el diálogo previo al conflicto y la integración antes que el rechazo. Pues, de acuerdo con Zrudlo (2022), “no podemos enfrentar la historia de manera justa sin abordarla ética y políticamente” (p. 416).

3. Orientación metodológica del estudio

El propósito del estudio es indagar cuál es el sentido formativo de las clases de Historia desde la perspectiva docente en el nivel medio superior. Cabe señalar que en México este nivel es equivalente al bachillerato o preparatoria y corresponde a estudiantes entre 15 y 18 años.

Para este estudio, se gestionó la participación de docentes de Historia entre 28 y 35 años de edad que imparten cursos en el mencionado nivel educativo. Participaron 6 historiadores, licenciados en Historia, que además de ser docentes se encuentran estudiando el segundo año de Doctorado en Historia: 4 hombres (66.6%) y 2 mujeres (33.3%); aceptando participar mediante un consentimiento informado, por un muestreo no probabilístico e intencionado.

Se indagó la enseñanza de la Historia como objeto de estudio mediante dos instrumentos de levantamiento de datos: una narrativa y un cuestionario. El primero consistió en una narrativa de cada docente, asumiendo una postura sobre la disciplina que imparte, el enfoque de enseñanza y estrategias pedagógicas que emplea, así como la relevancia de esa disciplina en la formación de jóvenes preuniversitarios. Incluyendo ejemplos de cómo regularmente motiva al estudiantado al impartir su asignatura, y mecanismos de evaluación usuales. Se recurrió a la técnica de recolección de información de narrativas pedagógicas, porque en ellas se configuran descripciones e interpretaciones de situaciones de enseñanza (Del Rincón, Latorre, Arnal y Sans, 1995). Cabe mencionar que Bamberg (2011) arguye: "narrar permite a los hablantes/escritores desvincularse del yo que habla/escribe, y tomar así una posición reflexiva frente al yo como personaje en un tiempo y espacio pasado o ficticio, y hacer que esos eventos pasados (o imaginados) sean relevantes para el acto de contar" (p. 5).

Esta técnica de obtención de información corresponde a una aproximación de investigación cualitativa que privilegia la perspectiva de quienes están insertos en el fenómeno educativo bajo estudio "captando el significado particular que a cada hecho atribuyen los propios protagonistas", en un "proceso de indagación que ya no es individual, sino que se hace público" (Bisquerra, 2009, p. 70). Se estudia, así, la realidad educativa como "una construcción social resultante de las interpretaciones subjetivas y los significados que le otorgan las personas que la protagonizan" (p. 74).

Se propone la utilización del relato, por ser un vehículo que capta la riqueza y detalles de los significados construidos, sean sus motivaciones, sentimientos, deseos o propósitos, como modo de acceder al conocimiento y comprensión de la perspectiva de los docentes. Ello no se logra expresar plenamente por otros medios, como podrían ser definiciones o enunciados factuales (Bolívar, Dominguez y Fernández, 1998), puesto que la narrativa posibilita la expresión de la dimensión emotiva de la experiencia, la complejidad, relaciones y singularidad del accionar humano. Para McEwan y Egan (1998), el discurso narrativo es fundamental en ir comprendiendo cada vez más la enseñanza y el aprendizaje, puesto que la narrativa consiste precisamente en hacer inteligibles nuestras acciones para nosotros mismos y para otros.

De las narrativas se analizó si la enseñanza de la Historia promueve un pensamiento y conciencia históricos en sus estudiantes, identificando estrategias educativas utilizadas, su intencionalidad y alcances, desde la perspectiva de los docentes, como actores del hecho educativo, para reconstruir el sentido de sus enseñanzas de la asignatura.

El segundo instrumento fue un cuestionario a los docentes para obtener información complementaria sobre sus prácticas educativas al regreso presencial a clases. Consistió en 13 preguntas sobre años de experiencia, intención educativa, estrategias pedagógicas y procesos cognitivos promovidos, así como intereses de sus estudiantes por asistir a sus clases y la consideración del componente socioemocional. El instrumento se basa en Arreola, Gómez y Jiménez (2023), quienes indagan sobre aspectos similares desde la perspectiva de estudiantes de Historia.

Consideramos que nuestros hallazgos podrían aportar a procesos de enseñanza de otros niveles de educación básica y superior.

4. Análisis de resultados

Los análisis y resultados de cada instrumento son exclusivos de los casos estudiados sin representar prácticas comunes de otros profesores de Historia.

4.1 Análisis de las narrativas

El análisis del contenido de las narrativas implicó un proceso que inició, de acuerdo con los referentes conceptuales del estudio, identificando las formas de significar la conducción de las acciones docentes expresadas mediante el instrumento empleado. De esta manera, se siguió una ruta de análisis que atravesó todos los datos, examinando y fragmentando la información en unidades de significado y a cada unidad se le fue asignado un código. De acuerdo con Bisquerra (2009), estas unidades de significado constituyen fragmentos del texto analizado a los que se les atribuye un sentido o significado propio, y se vinculan a una determinada categoría. El proceso analítico continuó agrupando y reagrupando los distintos códigos identificados, lo que llevó finalmente a configurar cuatro categorías analíticas derivadas del análisis de los datos recabados. Cabe recordar que se realizó un análisis de datos discursivos de los historiadores que participaron, en tanto no se hicieron observaciones de las clases en escenarios naturales.

A continuación, se explican las categorías analíticas en torno a las cuales se advierten explicaciones del sentido formativo de las prácticas docentes, que son: intención educativa, acciones pedagógicas, movilización de la participación y verificación de aprendizajes. De ellas se explican y se recuperan testimonios representativos.

1) La *intención educativa* corresponde al propósito que persigue el docente en sus estudiantes cuando imparte su clase. Se encontró que el profesorado no busca que sus educandos memoricen fechas, y evitan una clase monográfica de acontecimientos históricos. Enfatizan vincular los temas del curso con el contexto actual en que se vive, mediante reflexiones profundas y diálogos abiertos en el grupo,

destacando la labor del historiador que se apoya en una metodología, su aplicación y un pensamiento crítico. Se recuperan los siguientes fragmentos narrativos sobre este aspecto del análisis:

> "Considero importante remarcar que la memoria no es el fin último del curso, sino una mera herramienta de apoyo para el estudio del desarrollo humano a través del tiempo" (D2).

> "Cuando comentamos la lectura de poco sirve que sepamos que en 1789 fue la Revolución Francesa si no entendemos antes por qué se le llamó Revolución" (D1).

Claramente, como lo expresa uno de los docentes a continuación, la intención educativa va en el sentido de que "los alumnos entienden que la Historia, como asignatura escolar, tiene un uso más cercano a la realidad actual y se muestran mucho más interesados" (D1).

En la consecución de tales intenciones, es usual que el docente formule preguntas destinadas a la problematización y la reflexión, más que a dar respuestas de antemano, para que los estudiantes las apunten y memoricen. Al respecto, la siguiente voz docente:

> "Las participaciones a veces son más en tono de pregunta que de respuesta y no es extraño que nos vayamos con muchas de ellas sin responder" (D2).

2) Las acciones pedagógicas son identificadas como aquellas actividades y recursos educativos empleados en la clase, para la impartición de los contenidos de la asignatura. Del análisis se desprende que los docentes estudiados constantemente están observando a sus estudiantes y van adecuando la conducción de la clase a lo largo del desarrollo, como se muestra en este fragmento narrativo:

> "A veces las alumnas y los alumnos solo ven el suelo o se ven unos a otros. Trato de no prolongar esos silencios y averiguar si lo que hay es apatía al tema, algún momento complejo del semestre o si quizá la lectura no fue la adecuada. Lo anterior me permite analizar la manera en cómo voy a exponer el tema de la clase" (D2).

Durante la sesión escolar, cada docente hace un amplio despliegue de numerosas acciones pedagógicas y va construyendo la propia estructura de la clase. Por ejemplo, uno de ellos dice:

> “Para despertar el interés entre los alumnos, normalmente comienzo preguntando qué entienden por ‘historia’. Esto me permite conocer su concepción al respecto y conducirlos por el camino de la crítica y el análisis, herramientas que me parecen fundamentales para emprender el proceso epistemológico y darle un uso más allá de las aulas” (D2).

Del análisis se deriva que sus clases se estructuran alrededor de la acción educativa, por lo que la sesión toma forma de la siguiente manera:

> “Se elige a un alumno para que en cinco minutos articule una introducción para la temática que se abordará en la sesión” (D3).

> “Ya que el voluntario del día presentó el tema que se abordará, impulso una ronda de lluvia de ideas para identificar los conceptos que los alumnos consideran más relevantes” (D3).

> “Una vez anotados tanto los elementos centrales como los que generaron dudas se procede a articular su significado en cuanto al proceso económico pretérito que se está estudiando” (D3).

En los tres fragmentos anteriores, a partir de una actividad desencadenante que es la introducción del tema por parte de un estudiante que se autopropone, el profesor deriva el siguiente segmento de la clase en el que se efectúan las clarificaciones a las que haya lugar, y se van abordando las temáticas introducidas al inicio.

Estos hallazgos revelan cómo las acciones pedagógicas van dando forma a la organización de la clase, como se muestra en otro ejemplo de la orientación del docente:

> “Para aclarar estas cuestiones se abundó en la lluvia de ideas y paulatinamente se logró establecer la diferencia entre derechos reales-impuestos, sobre todo desde su fundamento jurídico y, más adelante, se logró ejemplificar la lógica que existía detrás del pago de alcabalas (un impuesto sobre el comercio)” (D3).

Lo anterior dio lugar, a su vez, a que en la clase se incluyera un segmento en el que:

> “Armamos grupos y simulamos transacciones mercantiles para que los alumnos entendieran el proceso que seguían las mercancías y en qué momento eran fiscalizadas con la alcabala” (D3).

En esta categoría se muestra que los docentes indagados permanentemente recurren a diversas acciones pedagógicas y van configurando o reconfigurando la clase durante el proceso mismo, haciendo lecturas sobre sus estudiantes en la clase, utilizando preguntas para verificar sus comprensiones e intereses.

3) La *movilización de la participación* corresponde a acciones docentes para propiciar que sus estudiantes se entusiasmen por una participación activa y sostenida en la clase. Se evidencia que en general estos profesores buscan la menor clave en la clase, que los lleve a reconocer temas que interesan a sus educandos, encontrando la manera de vincularlos con los contenidos de Historia. De algunas narrativas se exponen estos fragmentos:

> "La mejor manera de motivar a los estudiantes es mostrando la relación del proceso abordado con su propia vida y entorno" (D3).

> "De tal suerte, los alumnos entienden que la Historia, como asignatura escolar, tiene un uso más cercano a la realidad actual y se muestran mucho más interesados"; "Así, considero que el alumno siente que su opinión es valorada y le anima a seguir participando e interesado en los contenidos del curso" (D2).

Claramente recurren a "relacionar el conocimiento del pasado con situaciones cotidianas a las que se enfrentan los estudiantes en su proceso de formación" (D3). Usualmente, lo que hacen es "solicitar identificar algún concepto que hayan tratado en alguna de sus otras materias y buscar contextualizar tanto su origen como las transformaciones a lo largo del tiempo" (D3).

Es evidente que, aunque como lo dice uno de los docentes, motivar a los estudiantes "es algo que sinceramente cuesta trabajo pues en muchas ocasiones la materia de Historia suele verse como algo aburrido y/o que no sirve para nada al estudiante" (D4), lo que hacen todos los profesores es establecer en la clase el vínculo del pasado con su vida cotidiana.

Destaca cómo en el afán de involucrar a sus estudiantes en el aprendizaje de la Historia, recurren con buenos resultados a "utilizar el 'chisme histórico' o el '*gossip*', se trata de abordar los temas históricos desde la parte más mundana e incluso morbosa, pues eso es lo que luego llama la atención de los estudiantes. Por ejemplo: "¿es verdad que Napoleón era chaparrito? ¿Cuántas amantes tuvo Hidalgo? ¿Benito Juárez sí era masón? ¿Las mujeres en serio no participaban en la política antes?" (D4). De forma similar, uno de los docentes expresa: "Les decía que la Historia no era difícil, que era como cuando un amigo nos cuenta un chisme, este pasó en un lugar y tiempo determinado, bajo ciertas circunstancias que lo hacen interesante y con ciertos involucrados que hace aún más llamativo” (D6).

El compromiso docente se revela en sus narrativas, y queda resumida en esta: “Por más restrictivo que sea la institución educativa, el profesor siempre se las ingenia para estar a favor de los estudiantes, motivarlos, ser cómplice” (D6).

4) La *verificación de aprendizajes* se construye a partir de los mecanismos que los docentes ponen en acción para ir dando cuenta y reconociendo las comprensiones de los estudiantes respecto de los temas del curso. Así, los procedimientos de evaluación empleados se corresponden con las acciones educativas y las formas en que se motiva a los estudiantes para involucrarlos activamente en la clase, de manera coherente.

Aunque se identifican casos en los que la institución educativa demanda exámenes como forma de asignar calificación, los docentes encuentran manera de incorporar otros registros, como pueden ser proyectos parciales y actividades en la clase. Se recupera la siguiente narrativa:

> “En su diseño [de exámenes] descarto el ejercicio de la memoria y doy preferencia a la comprensión del desarrollo de procesos históricos” (D2).

Usualmente, estos profesores recurren a ensayos y proyectos para dar seguimiento a los aprendizajes de sus estudiantes, puesto que lo que “interesa es ver esas ideas y no que nos cuenten una historia”, “que hayan comprendido qué corresponde a cada elemento: planteamiento del problema, estado de la cuestión, hipótesis, objetivos y bibliografía” (D1).

Se identifica interés centrado en cómo el aprendiz va procesando la información. Por ejemplo, un docente explica sus evaluaciones:

> “Consisten en la elaboración de proyectos guiados por pautas relacionadas con el ejercicio crítico y reflexivo del alumno, más allá de la cantidad o la precisión” (D2).

A la vez, los docentes buscan verificar los aprendizajes teniendo en cuenta el sentido que para ellos tiene enseñar Historia. Algunos testimonios son:

> “La evaluación se orienta a que los alumnos demuestren cierta comprensión de fenómenos pretéritos y su relación con el presente”; “proporciono preguntas generales que sirven como guías o detonantes para que los alumnos puedan explicar algunos de los fenómenos vistos en clase” (D3).

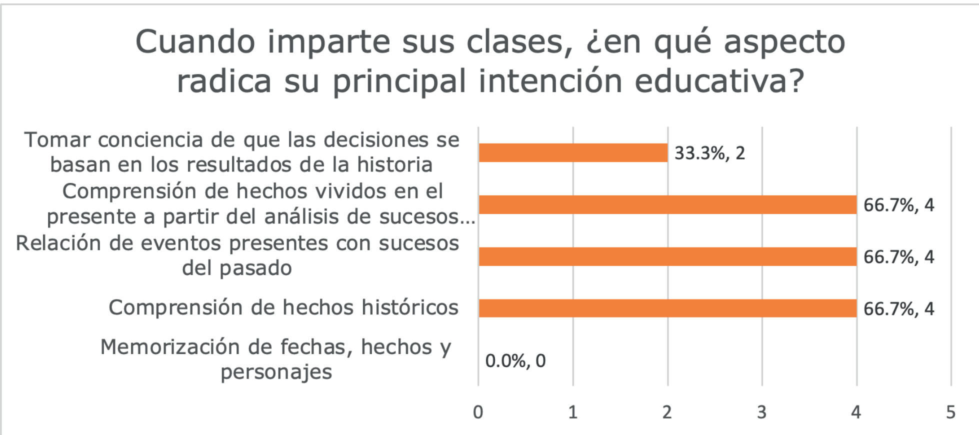
> “Ejercicios en línea, preguntas de reflexión, mapas mentales, discusiones, debates” (D4).

4.2 Análisis del cuestionario

Se destaca que un 83.3% de los docentes participantes han impartido la asignatura de Historia de México y 50% ha impartido Historia Universal y Contemporánea. Algunos poseen experiencia docente de mínimo tres años (el 32%) y el resto de más años.

Sobre la *intención educativa* al conducir sus clases, lo que se analizó en las narrativas es que ningún docente pretende priorizar la memorización (figura 1). Contrariamente, destacan promover la comprensión de hechos históricos, la relación de estos con eventos presentes, y la comprensión de hechos vividos en el presente a partir del análisis del pasado.

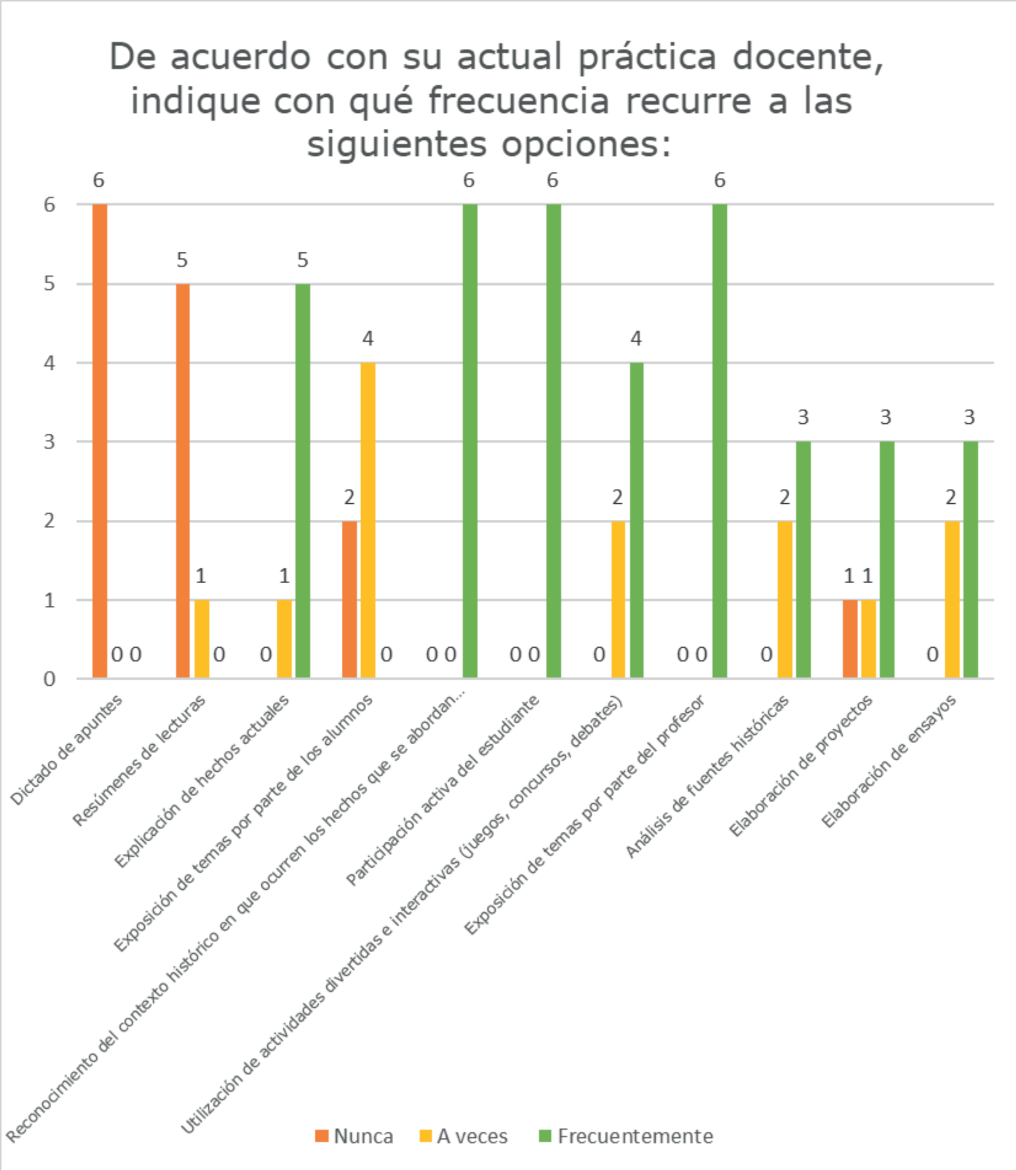
Figura 1. Intención educativa



Fuente: elaboración propia.

Explorando las *acciones pedagógicas*, los docentes expresan que con mayor frecuencia propician el reconocimiento del contexto histórico en que ocurren los hechos (figura 2). Aunque frecuentemente exponen el tema de la clase, siempre promueven participaciones activas del estudiante y explican hechos actuales. Notoriamente, ninguno de ellos refiere utilizar el dictado en su clase.

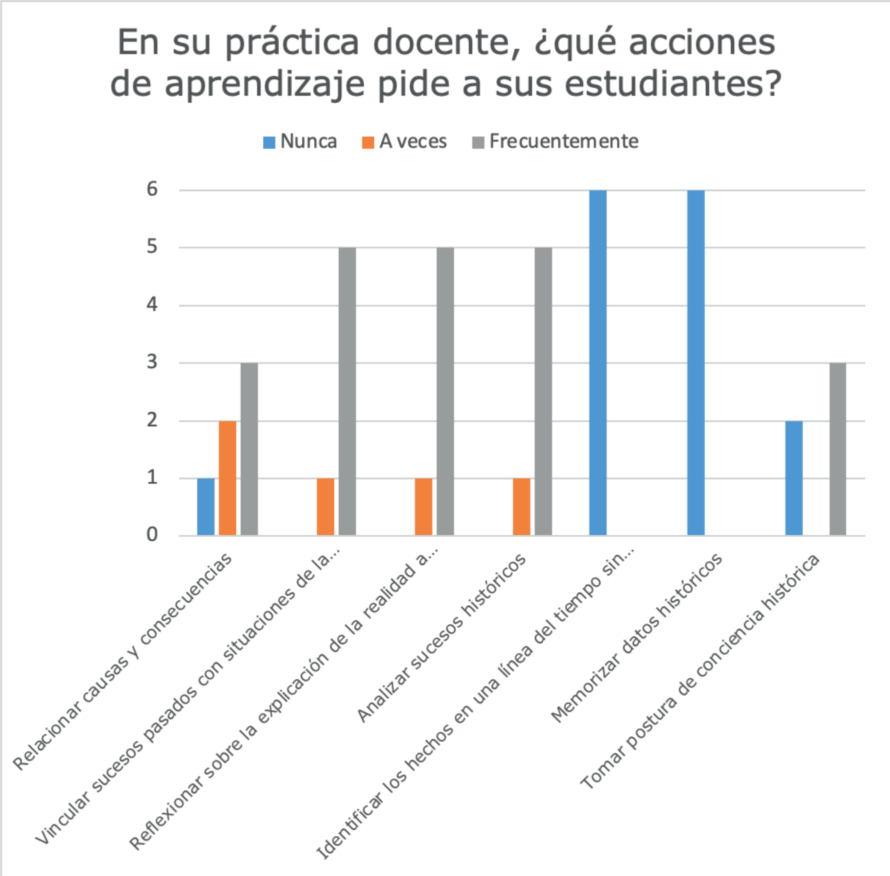
Figura 2. Estrategias de enseñanza



Fuente: elaboración propia.

Interesantemente, los docentes recurren a tres acciones pedagógicas relacionadas: analizar-reflexionar-vincular. Es decir, primero conducen a sus estudiantes a analizar los sucesos históricos, para que luego expliquen la realidad en la que viven a partir de tales antecedentes y, después, vinculen sucesos pasados con situaciones de la vida actual. Es así como evitan que sus alumnos memoricen datos históricos, o meramente identifiquen hechos en una línea del tiempo, sin mayor análisis (figura 3).

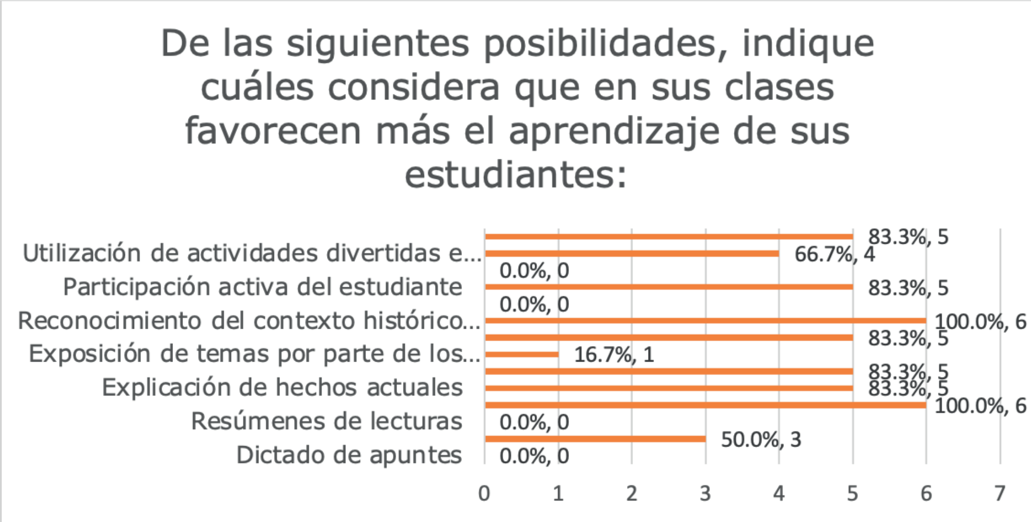
Figura 3. Estrategias de aprendizaje



Fuente: elaboración propia.

Esta conducción de la clase corresponde con una mirada de las mejores prácticas favorecedoras del aprendizaje en sus estudiantes, que es reconocer el contexto histórico de los hechos que se abordan en clase y vincularlos con situaciones de su vida (figura 4). Mientras que favorecen menos el dictado de apuntes, resúmenes, identificar hechos en una línea del tiempo y memorizar datos históricos.

Figura 4. Utilidad de las estrategias



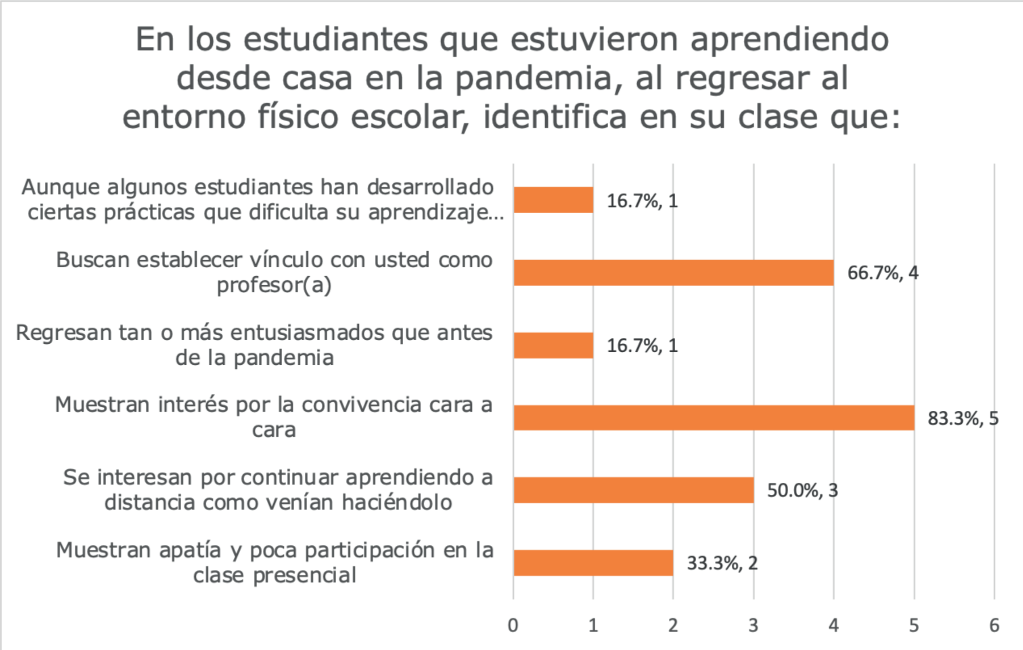
Fuente: elaboración propia.

Relacionado con la *movilización de la participación*, los profesores atribuyen mayor interés del alumnado principalmente por dos razones: (1) a características del estudiante, como el ser curioso o aficionado a algún personaje o tema particulares; (2) ya sea la forma de propiciar que sus alumnos encuentren utilidad al comprender sucesos pretéritos para entender acontecimientos presentes, o haciendo que les agrade descubrir semejanzas entre realidades actuales y temporalidades pretéritas, para posibilitar dialogar y analizar los temas.

Contrariamente, cuando los estudiantes muestran desinterés, los profesores señalan razones atribuidas al estudiante de no ser capaces de memorizar, se sienten obligados a cubrir el plan de estudios, enfrentan dificultades personales que merman su rendimiento. Otras corresponden a preconcepciones sobre la asignatura, como el considerar los temas pasados y ajenos a ellos, sumamente teóricos y áridos, e incluso aburridos. Un tercer y último conjunto de explicaciones es enseñar empleando estrategias pedagógicas poco atractivas, que propician falta de significado del conocimiento histórico para su vida.

Se consideró explorar sobre el regreso a clases presenciales, después de la pandemia por COVID-19 que mantuvo a los estudiantes aprendiendo desde casa, ante lo cual estos profesores detectaron en ellos interés por convivir cara-a-cara y establecer vínculos con compañeros y el docente (figura 5).

Figura 5. Actitud estudiantil



Fuente: elaboración propia.

Indagando el componente emocional, salvo un profesor que se dijo no estar al tanto de esto, los demás expresaron preocupación por atender lo emocional desde la comunicación, respeto y ser receptivos a manifestaciones del sentir del alumnado, tal como muestran los siguientes testimonios:

> "Trato siempre de ser cercana a mis alumnos y alumnas. Siempre les llamo por su nombre"; "También estoy dispuesta a escuchar sus necesidades" (D1).

> "Un diálogo que se retoma en cada sesión para que cada uno pueda externar el cómo se siente; es decir, si se confunde, si hay frustración, si se sienten cómodos o los posibles motivos que favorecen o impiden el desarrollo de sus propias investigaciones" (D2).

> "Es importante que el docente considere a cada alumno es su entorno y situación emocional, si hay problemas psicológicos, emocionales, económicos, etc., para poder saber cómo guiar al alumno en la materia o en lo que se necesite" (D5).

Asimismo, los docentes expresan que ambicionan mediante sus cursos lograr en sus estudiantes mayor conciencia histórica, basada en conocimientos del pasado, que les amplíe su visión y comprensión del desarrollo histórico de su sociedad, y una actitud crítica ante ella, su entorno y sucesos del presente. Procuran acercarlos a textos, cuestionando qué quiso decir el autor a las personas de su época y, con ello, puedan los alumnos comprender, contextualizar y relacionar fenómenos pasados con la época contemporánea en un diálogo sin anacronismos, evitando juzgar las acciones pretéritas sin mayor análisis.

Los profesores se ocupan de hacer que la Historia deje de ser sinónimo de "memorizar fechas y nombres", impidiendo solo consultar textos con fragmentos de información sin mayor comprensión. En cambio, se esfuerzan por generar ser críticos frente a todo lo que aprenden.

Finalmente, sobre lo que les significa ser docente, se puede identificar compromiso y disfrute de compartir su conocimiento, formar individuos reflexivos y críticos, capaces de entender su realidad para incidir en ella. Asumen enseñar Historia como una actitud de vida y labor esencial de impulsar el pensamiento crítico en sus estudiantes.

5. Conclusiones

El estudio permite reconocer que las prácticas docentes de quienes participaron se orientan a trascender la memorización de datos y, en cambio, promover analizar sucesos históricos para comprender el contexto en el que viven sus estudiantes, así como llevarlos a reconocerse como sujetos históricos en su devenir cotidiano. Como señalan Arreola, Gómez y Jiménez (2023), las prácticas de enseñanza de la Historia tienen impacto en la formación y motivación del estudiantado, por lo que se considera la apremiante necesidad de trasladarse de un paradigma tradicional a uno crítico-reflexivo, en donde el profesor deje de ser trasmisor de conocimiento y se convierta en mediador de aprendizajes con sentido para sus alumnos.

Los hallazgos aportan que los docentes del estudio implementan una enseñanza que promueve la participación activa de sus estudiantes y su visión da relevancia a esta disciplina en la formación de jóvenes de bachillerato. En un momento histórico en el que, debido a las tecnologías, la información parece abundar y encontrarse al instante al pulsar de un clic, es más imperante abandonar la visión enciclopédica de la Historia y sustituirla por una aproximación crítica y reflexiva. Probablemente, uno de los más grandes logros de la Modernidad fue la Enciclopedia, editada por Denis Diderot y Jean le Rond d'Alembert a mediados del siglo XVIII; pero frente a tantas enciclopedias electrónicas y al desarrollo de inteligencias artificiales en el siglo XXI, quizá lo que deba buscarse en esta era postmoderna sea la comprensión, discernimiento y posicionamiento frente a la inmensa abundancia (a veces saturación) de información.

Por otro lado, los casos estudiados evidencian la importancia de recuperar metodologías activas que promuevan el aprendizaje significativo, mediante el favorecimiento del pensamiento crítico, el cual forma parte de las habilidades intelectuales superiores a fortalecer en los estudiantes; pues son esenciales para propiciar el tipo de pensamiento que se pretende mediante la disciplina de la Historia, y que, sin embargo, anteriormente e institucionalmente ha sido descuidado en las prácticas didácticas y evaluativas. De esta forma, podría cumplir con la función formativa esencial de la Historia que, a decir de Prats y Santacana (2011), consiste en analizar problemas de las sociedades de otros tiempos, para ayudar a comprender la complejidad de cualquier acontecimiento, fenómeno social-político actual, así como de cualquier proceso del pasado examinando sus causas y consecuencias.

Del estudio se deriva que estos docentes mantienen una congruencia entre su intencionalidad educativa, objetivos, prácticas y significado de enseñar Historia, con un enfoque analítico-crítico en sus prácticas educativas. Toman en cuenta al estudiante y su circunstancia, por lo que constantemente buscan identificar cuáles son sus intereses, necesidades y reconocer sus estados emocionales, lo cual los lleva a conducir sus clases adoptando diversidad de formas que favorezcan sus aprendizajes, sin desviarse del sentido que para cada docente tiene enseñar Historia; coincidiendo con Moreno-Vera, Ponsoda-López y Blanes-Mora (2021), quienes concluyen que utilizar diversos recursos además del texto representa un elemento de motivación para los estudiantes, dado que la enseñanza de la historia ha mantenido una estructura extremadamente rígida y tradicional.

El sentido que le dan es construir en el alumno mayor conciencia histórica, que les permita una actitud crítica ante la sociedad y los sucesos del presente, sin necesariamente recurrir exclusivamente a la memorización, de forma que tomen conciencia del mundo y sociedad del contexto en el que viven. Jóvenes que revaloren su sociedad y puedan emplear métodos de esta disciplina, para incidir favorablemente en su entorno, a partir de reconocerse como sujetos sociales e históricos.

Asimismo, se encontró que su identidad docente es de compromiso por formar personas con una actitud reflexiva y crítica, que puedan emplear métodos de esta disciplina para favorecer su entorno, a partir de reconocerse como sujetos sociales e históricos. Probablemente, la media de edad de los participantes pudiera favorecer el uso de prácticas educativas innovadoras, dado que su formación actual no está basada en una enseñanza tradicionalista centrada en la repetición y memorización.

La condición de los docentes participantes de estar estudiando un doctorado en Historia podría influir en desestimar un enfoque de enseñanza tradicional y, por el contrario, responder a nuevas tendencias de la disciplina histórica y de la pedagogía.

De los hallazgos se deriva una propuesta alternativa para la enseñanza y el aprendizaje con directrices concretas y específicas, orientada a promover la construcción del pensamiento histórico que contribuya a formar ciudadanos libres, reflexivos, críticos y democráticos del siglo XXI para constituirse en agentes de cambio de la realidad social; lo cual será objeto de otro artículo próximo a publicarse.

6. Referencias bibliográficas

Álvarez, H. (2020). Enseñanza de la historia en el siglo XXI: Propuestas para proponer el pensamiento histórico. *Revista de Ciencias Sociales*, *26*(2), 442-459. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7599956

Álvarez, H. (2023). El laboratorio histórico como estrategia de indagación para desarrollar el pensamiento histórico en la formación del profesorado de historia. *Inverciencia, 48*(5), 245-251. https://www.interciencia.net/wp-content/uploads/2023/06/03_6979_A_Alvarez_v48n5_7.pdf

Álvarez, H. (2021). Evaluación del pensamiento histórico de estudiantes de secundaria a través de la construcción de narrativas históricas sobre los pueblos originarios de Chile. *Anos 90 Revista do Programa de Pós-Graduação em História*, *28*, 1-18. https://doi.org/10.22456/1983-201X.111650

Alvén, F. (2021). Opening or closing Pandora's box? – Third-order concepts in history education for powerful knowledge. *El Futuro del Pasado, 12*, 245-263. https://doi.org/10.14201/fdp202112245263

Arreola, R., Gómez, L. y Jiménez, K. (2023). Aprender historia con sentido. La perspectiva de jóvenes de bachillerato. *UCMaule, 65*, julio-diciembre, 78-101. https://doi.org/10.29035/ucmaule.65.78

Bamberg, M. (2011). Who am I? Narration and its contribution to self and identity. *Theory & Psychology*, *21*(1), 3-24. https://doi.org/10.1177/0959354309355852

Barca, I. (2011). Narrativas e consciência histórica dos jovens. *Enseñanza de las Ciencias Sociales, 10*, 22-2. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=324127610004

Barton, K. C. (2010). Investigación sobre las ideas de los estudiantes acerca de la historia. *Enseñanza de las Ciencias Sociales*, *9,* 97-114. https://www.redalyc.org/pdf/3241/324127609010.pdf

Bisquerra, R. (coord.) (2009). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Bolívar, A., Domínguez, J. y Fernández, M. (1998). *La investigación biográfico-narrativa en educación. Guía para indagar en el campo.* FORCE, Universidad de Granada, y Grupo Editorial Universitario. https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/viewFile/14/58

Carretero, M. (2007). Tres sentidos de la historia. En *Documento de identidad: la construcción de la memoria histórica en un mundo global (pp. 18-58). Paidós..*

Carretero, M. y López, C. (2009). Estudios cognitivos sobre el conocimiento histórico: aportaciones para la enseñanza y alfabetización histórica. *Enseñanza de las Ciencias Sociales*, *8*, 75-89. https://www.redalyc.org/pdf/3241/324127628009.pdf

Cortes, J. E., Daza, J. y Castañeda, J. G. (2019). Relación del entorno socioeconómico con el desempeño de la comprensión lectora en universitarios. *Revista de Ciencias Sociales*, *25*(4), 119-133. https://www.redalyc.org/journal/280/28062322009/

Chávez, C. y Meneses, B. (2022). El alumnado como sujeto histórico. La dimensión personal y la experiencia histórica en el desarrollo del pensamiento histórico. *Revista Escuela de Historia*, *21*(2), 1-18. https://portalderevistas.unsa.edu.ar/index.php/reh/article/view/4245/4619

Chávez, C. (2024). Profesorado en formación y desarrollo del pensamiento histórico en universidades chilenas. *Perfiles Educativos*, *46*(184), 111-126. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2024.184.61328

Del Rincón, D., Latorre, A., Arnal, J. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en Ciencias Sociales.* Dykinson.

Fronza, M. (2015). *La constitución de una didáctica de la historia y la formación docente: por un concepto del aprendizaje histórico. Andamio*, *2*(4), 69-83. https://doi.org/10.4151/0719409924201573

Gómez, C. y Miralles, P. (2015). ¿Pensar históricamente o memorizar el pasado? La evaluación de los contenidos históricos en la educación obligatoria en España. *Revista de Estudios Sociales, 52*, 52-68. https://doi.org/10.7440/res52.2015.04

Gómez, C., Ortuño, J. y Molina, S. (2014). Aprender a pensar históricamente. Retos para la historia en el siglo XXI. *Revista Tempo e Argumento*, 6(11), 5-27. https://doi.org/10.5965/2175180306112014005

Gómez, C., Rodríguez, R. y Miralles, P. (2015). La enseñanza de la Historia en educación primaria y la construcción de una narrativa nacional. *Perfiles Educativos, 37*(150), 20-38. https://www.redalyc.org/pdf/132/13242743002.pdf

Ibagón, Nilson J. Martí (2023). Transformar la enseñanza y aprendizaje de la Historia desde la Educación Histórica. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Historia Regional, 50,* 1-13. http://historiaregional.org/ojs/index.php/historiaregional/index

López, M., Veliz, M. y Márquez, R. (2023). El pensamiento histórico y la enseñanza de la historia. *Transformación, 19(3),* 429-443. http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v19n3/2077-2955-trf-19-03-566.pdf

López, R., Miralles, P., Prats, J. y Gómez, C. J. (Comp.) (2017). *Enseñanza de la historia y competencias educativas*. Graó.

Madariaga, P. y Schaffernicht, M. (2013). Uso de objetos de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento crítico. *Revista de Ciencias Sociales*, *19*(3), 472-484. https://www.redalyc.org/pdf/280/28028572010.pdf

McEwan, H. y Egan, K. (Comp.) (1998). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación*. Amorrortu.

Meneses, B., González-Monfort, N. y Santisteban, A. (2019). La "experiencia histórica" del alumnado y la historia oral en la enseñanza. *Historia y Memoria*, *20,* 309-343. https://doi.org/10.19053/20275137.n20.2020.8258

Moreno-Vera, J., Ponsoda-López, S. y Blanes-Mora, R. (2021). By Toutatis! Trainee Teachers' Motivation When Using Comics to Learn History. *Frontiers in Psychology*, *12*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.778792

Ortuño, J., Gómez, J. y Ortiz, E. (2012). La evaluación de la competencia educativa social y ciudadana desde la didáctica de las ciencias sociales, un estado de la cuestión. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales, 26,* 53-72. https://doi.org/10.7203/dces.26.1931

Prats, J. y Santacana, J. (2011). ¿Por qué y para qué enseñar historia? En J. Prats (coord.), *Didáctica de la geografía y la historia* (pp. 13-29). Graó.

Rivero, P., Aso, B. y García-Ceballos, S. (2023). Progresión del pensamiento histórico en estudiantes de secundaria: fuentes y pensamiento crítico. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *25*, e09, 1-16. https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e09.4338

Sáiz, J. y Colomer, J. (2014). ¿Se enseña pensamiento histórico en libros de texto de educación primaria? Análisis de actividades de historia para alumnos de 10-12 años de edad. *CLIO. History and History teaching*, *40*, 1-19. http://clio.rediris.es/n40/articulos/saizycolomer2014.pdf

Sáiz, J. y Gómez, C. (2016). Investigar el pensamiento histórico y narrativo en la formación del profesorado: fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *19*(1), 175-190. https://doi.org/10.6018/reifop

Sánchez, A. (2000). *Reencuentro con la historia. Teoría y praxis de su enseñanza en México.* (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional Autónoma de México.

Sánchez, A. y Colomer, J. C. (2018). Gamificación y construcción del pensamiento histórico: Desarrollo de competencias en actividades gamificadas. *CLIO. History and History Teaching*, *44*, 82-93. https://doi.org/10.26754/ojs_clio/clio.2018448671

Seixas, P. y Morton, T. (2012). *The Big Six. Historical Thinking Concepts*. Nelson Education.

Vilar, P. (2001). *Pensar la historia*. Instituto de Investigaciones Dr. José M.ª Luis Mora.

Zrudlo, I. (2022). What Form of Historical Consciousness Should Schools Impart? *Stud Philos Educ*, *41,* 405-423. https://doi.org/10.1007/s11217-022-09829-5