

Recibido: 13-07-24

| Aceptado: 09-10-24

| Publicado: 20-12-2024

## SOBRE LA REALIDAD DEL TRABAJO MATEMÁTICO REALIZADO POR ALUMNOS Y PROFESORES

ON THE REALITY OF MATHEMATICAL WORK UNDERTAKEN  
BY STUDENTS AND TEACHERS

ALAIN KUZNIAK

Université Paris Cité

París, Francia

[alain.kuzniak@u-paris.fr](mailto:alain.kuzniak@u-paris.fr)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8170-3530>

ESTUDIOS

### Resumen

Este trabajo se centra especialmente en la realidad del trabajo matemático realizado por alumnos y profesores. Para investigar esta cuestión, se desarrollaron sesiones de clase en un curso de formación continua de profesores. Estas sesiones se analizaron mediante el uso de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TDS) y la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ThETM). El uso combinado de estas dos teorías ha permitido desarrollar y realizar una codificación de las sesiones observadas. Con esta codificación, pudimos estudiar los ETM idóneos (potenciales y reales) que surgieron durante la formación.

En particular, es posible identificar diferentes patrones que permiten reconocer y caracterizar distintas formas de contratos fuertemente didácticos. Las herramientas, y especialmente la codificación, desarrolladas para el estudio podrían utilizarse en futuras investigaciones sobre situaciones didácticas en relación con el ETM idóneo.

**Palabras claves:** Devolución e institucionalización, situaciones didácticas, itinerarios y caminos, trabajo matemático y circulación del trabajo, contrato fuertemente didáctico.

## Abstract

The present study focuses on the actual practice of mathematical work by students and teachers. In order to investigate this question, a series of classroom sessions were developed for use in a teacher training course. The sessions were subjected to analysis using the Theory of Didactic Situations (TDS) and the Theory of Mathematical Working Spaces (ThMWS). The combination of these two theories has enabled the development and implementation of a coding system for the observed sessions. The coding facilitated the examination of the *idoine* (potential and actual) MWSs that emerged during the training. In particular, it permitted the identification of distinct patterns, which enabled the recognition and characterization of different forms of strongly didactic contracts. The tools, and in particular the coding, developed for the study could be employed in future research on didactic situations in relation to the *idoine* ETM.

**Keywords:** Devolution and institutionalization, didactic situations, itineraries and paths, mathematical work and circulation of work, strongly didactic contract.

## 1. Introducción: Cómo las prácticas de los profesores y las respuestas de los alumnos se relacionan con el trabajo matemático

Una cuestión central de la didáctica de las matemáticas es la tensión entre la responsabilidad de los profesores de transmitir conocimientos en el aula y la expectativa de que los alumnos realicen un trabajo real orientado a la producción de un pensamiento matemático autónomo. La investigación sobre esta cuestión implica que se examinen los comportamientos y las prácticas de los profesores en relación con el proceso de aprendizaje de los alumnos. Entre los numerosos estudios y teorías en el campo de la educación matemática, algunos han abordado los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores y sus competencias. Una de las corrientes más influyentes se basa en el trabajo de Shulman (1986) que introdujo la noción de conocimiento pedagógico del contenido (PCK) para complementar el conocimiento del contenido matemático. A partir de esta idea, sucesivos desarrollos han contribuido a definir el corpus de conocimientos directamente relevantes para

la enseñanza de las matemáticas (Hill *et al.*, 2008). Otras teorías se centran en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos y descansan en hipótesis alternativas sobre cómo aprenden los estudiantes cuando abordan problemas por sí mismos o con el profesor. Entre las teorías en esta línea utilizadas actualmente en nuestro marco de investigación se encuentran la Teoría de la Objetivación (Radford, 2021), la Teoría de la Actividad en Didáctica de las Matemáticas (Vandebrouck, 2018) y la Abstracción en Contexto (Hershkowitz *et al.*, 2001).

Una particularidad de las teorías desarrolladas inicialmente en Francia, por ejemplo, en las investigaciones realizadas por Brousseau o Chevallard, es la consideración que se da a los contenidos matemáticos en el ámbito de la didáctica. La epistemología de los contenidos matemáticos desempeña un papel importante en el avance de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje. Es en este contexto en el que surgió nuestra pregunta sobre la conexión entre las prácticas de los profesores y las producciones matemáticas de los alumnos. Más concretamente, en este trabajo pretendemos evaluar la realidad y la efectividad del trabajo matemático realizado en una sesión de matemáticas e introducimos un marco desarrollado específicamente para analizar las prácticas de los profesores con respecto al nivel de compromiso de los alumnos. Para ello, se aplican en combinación las teorías de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997a) y Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak *et al.*, 2016; Kuzniak *et al.*, 2022). La primera, TSD, nos proporciona el concepto de contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997b) que ayuda a describir y caracterizar las interacciones profesor-alumno y su impacto en el trabajo matemático. La segunda, ThETM, explica el trabajo realizado y proporciona las herramientas analíticas para la evaluación de su realidad y eficacia.

En las secciones siguientes, exponemos los marcos teóricos de este estudio antes de presentar las herramientas utilizadas para identificar y describir los distintos tipos de contratos y abordar nuestra pregunta de investigación. Con estas herramientas, desarrollamos un sistema de codificación que aplicamos para analizar las sesiones observadas en nuestro estudio. Las sesiones de clase se diseñaron e implementaron como parte de un programa colaborativo de formación continua de profesores según el modelo Lesson Study, adaptado al contexto francés. A continuación, presentamos un análisis *a priori* de la situación didáctica asociada a una tarea de probabilidad (La liebre y la tortuga). Se describen y caracterizan las diferentes formas de contratos fuertemente didácticos identificadas. Por último, se presentan y discuten nuestros resultados y su posible uso en la formación de profesores y la investigación.

## 2. Marco teórico y metodología

### 2.1 Establecimiento del marco teórico

#### 2.1.1 El contrato didáctico de Brousseau

El concepto de contrato didáctico fue introducido por Brousseau (1986) para dar cuenta de los compromisos recíprocos implícitos o explícitos que reúnen al profesor y a los alumnos en torno a un proyecto pedagógico y que son específicos del conocimiento que se va a enseñar.

El contrato didáctico tiene una relevancia internacional significativa, siendo útil para interpretar una serie de situaciones en el aula y, por lo tanto, diversas dificultades encontradas por los estudiantes y profesores (Sarrazy, 1995).

Brousseau (1997b) introdujo las estrategias fuertemente didácticas que relacionó con formas específicas de contratos didácticos, denominados “contratos fuertemente didácticos”. Estas formas de contratos se asocian a las estrategias en las que la intención del profesor de enseñar matemáticas es claramente evidente. Esta definición puede parecer sorprendente dado que, *a priori*, un profesor de matemáticas tiene evidentemente la intención de enseñar matemáticas.

Para comprender mejor esta forma de contrato fuerte, puede ser útil contrastarla con otro tipo de contratos que introdujo Brousseau, los contratos débilmente didácticos: “En este caso, el profesor acepta organizar su mensaje en función de determinadas características de la persona a la que se dirige. El profesor asume cierta responsabilidad por el contenido del mensaje, pero ninguna por sus efectos en el receptor” (traducido de Brousseau, 1997b, p. 26).

El profesor solo se interesa entonces por el contenido matemático y su organización, sin preocuparse de cómo lo reciben los alumnos. Esto contrasta con el contrato fuertemente didáctico por el que el profesor se centra tanto en el contenido matemático como en la recepción de su mensaje.

Brousseau ha propuesto seis contratos fuertemente didácticos que ha descrito de forma más o menos explícita haciendo referencia a diferentes marcos teóricos (psicológicos, filosóficos, etc.): los contratos de imitación, de ostensión, de condicionamiento, el contrato constructivista, el contrato empirista y el contrato socrático (o mayéutico). El contrato de ostensión es el que tiene el nombre menos familiar e

inteligible con un nombre que sugiere fuertemente la visualización, como se verá más adelante. Brousseau lo definió de la siguiente manera:

El profesor “muestra” un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta “verlo” como representante de una clase de la que tendrá que reconocer los elementos en otras circunstancias.

La comunicación del conocimiento, o más bien el reconocimiento, no implica hacerlo explícito. Simplemente se supone que este objeto es el elemento genérico de una clase que el alumno tiene que imaginar a través de la interacción de ciertas variables que a menudo están implícitas (traducido de Brousseau, 1997b, p. 50).

Aunque Brousseau no indica claramente los diferentes parámetros que le permiten caracterizar los contratos fuertemente didácticos, destaca sin embargo dos *fases de la enseñanza* que deben tenerse en cuenta al observar las situaciones de instrucción y el contrato didáctico (1997b, p. 40): la devolución y la institucionalización. “La devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepte las consecuencias de esta transferencia de responsabilidad” (Brousseau, 1997a, p. 230).

Esta fase suele observarse cuando los profesores asignan a sus alumnos una nueva tarea (o subtarea).

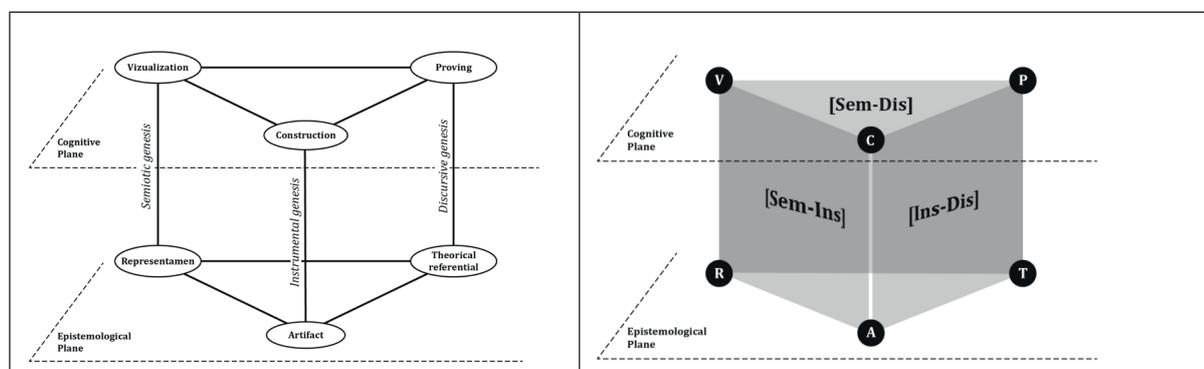
El constructo de institucionalización se introdujo para subrayar la responsabilidad de los profesores en el reconocimiento formal por parte de los alumnos del objeto de conocimiento implicado en el aprendizaje. Con la institucionalización, los alumnos deberían ser capaces de identificar el conocimiento que ahora deben conocer y dominar. En la visión socioconstructivista de Brousseau, la institucionalización sigue y concluye la búsqueda por parte de los alumnos de una solución a un problema.

Según este punto de vista, describir el papel y la naturaleza de la devolución y la institucionalización ayuda a identificar y caracterizar los contratos fuertemente didácticos. Llegados a este punto, estos contratos pueden parecer heurísticos y latentes, y aún tenemos que demostrar su operatividad. Este será uno de los objetivos del presente estudio.

## 2.1.2 Espacios de Trabajo Matemático

La Teoría de los ETM (ThETM) se centra especialmente en cuestiones relacionadas con la descripción, caracterización y formación del trabajo matemático con el fin de determinar lo que realmente se enseña y se aprende en matemáticas. En un dominio matemático dado, las facetas epistemológica y cognitiva de las matemáticas se consideran a través de la articulación de dos planos en un Espacio de Trabajo Matemático (figura 1, izquierda). El plano epistemológico se refiere principalmente al contenido matemático, mientras que el plano cognitivo da cuenta de las acciones de los alumnos individuales mientras resuelven problemas.

Figura 1. El diagrama ETM



Fuente: Kuzniak *et al.*, 2016, p. 725.

En el plano epistemológico se construyen tres componentes que interactúan: un conjunto de signos concretos y tangibles (R); un conjunto de artefactos (A); y un marco teórico de referencia (T). Centrado en las actividades cognitivas de los sujetos, otros tres componentes componen el plano cognitivo: la visualización (V) vinculada al desciframiento e interpretación de signos; la construcción (C), que depende del uso de artefactos materiales o simbólicos con técnicas asociadas a ellos; y la prueba (P) apoyada en un discurso racional y deductivo que proporciona validaciones estructuradas en torno a un marco de referencia teórico (T) o “referencial teórico”.

La dinámica activada entre los planos epistemológico y cognitivo se observa a través de tres génesis distintas: una génesis instrumental (Ins) relacionada con el uso de artefactos; una génesis discursiva (Dis) relacionada con la parte teórica del trabajo; y una génesis semiótica (Sem) que expresa la importancia de los signos en el trabajo

matemático. Se considera que el desarrollo del trabajo matemático se produce a través de interacciones congruentes de estas génesis en los planos verticales del diagrama (figura 1, derecha).

El diagrama ETM con sus tres planos verticales permite representar y visualizar la evolución y la dinámica entre las génesis durante la realización de una tarea o de un conjunto de tareas por los individuos. Esta dinámica se denomina circulación del trabajo (Kuzniak *et al.*, 2022, p. 66).

Para profundizar el estudio en el trabajo matemático, se distinguen tres ETM: de referencia, personal e idóneo.

El *ETM de referencia* es el que definen las personas u organizaciones responsables de la institución educativa. Uno de los elementos esenciales de este ETM es el referencial teórico.

El *ETM personal* refleja la realidad del trabajo realizado por determinados estudiantes que deciden abordar y completar una tarea de resolución de problemas.

El último, el *ETM idóneo*, es específico de la clase en cuestión.

*Se refiere a ese estado intermedio de transmisión y mediación del conocimiento en el que existe tensión entre las expectativas del profesor y la redefinición de las tareas y el problema para que progrese el trabajo personal de los alumnos (Kuzniak, 2022, p. 18).*

En la ThETM, la expectativa de que surja un contrato fuertemente didáctico es parte del estudio del trabajo matemático real que resulta de la situación de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, el estudio de la circulación del trabajo en el ETM idóneo puede contribuir a calibrar el grado de compromiso y eficacia de profesores y alumnos en la producción de trabajo matemático real. La consideración del ETM idóneo es fundamental para este estudio.

### 2.1.3 Algunos criterios para identificar los contratos fuertemente didácticos

La noción de contratos didácticos se utiliza en diversos estudios a distintos niveles y a través de entrevistas cualitativas, pero también en procesos de evaluación a gran escala. Sin embargo, pocos la han considerado específicamente en términos

del grado débil o fuerte del contenido matemático durante la implementación de una tarea por parte del profesor. A este respecto, Perrin-Glorian y Hersant (2003) introdujeron cuatro componentes para describir y comprender mejor el contrato didáctico.

*Los dos primeros están relacionados con el conocimiento en cuestión: el dominio matemático, el estatus didáctico del conocimiento. El tercer componente trata de la naturaleza y las características de la situación didáctica en curso, el último, trata del reparto de responsabilidades vinculadas al conocimiento entre el profesor y los alumnos (traducido de Perrin-Glorian y Hersant, 2003, p. 238).*

Cada uno de estos componentes fue analizado en detalle por los autores, que observaron una falta de estabilidad y regularidad en los microcontratos que identificaron. Además, sugirieron que sería interesante analizar a un nivel más amplio para identificar los contratos más recurrentes.

A partir de esta conclusión, optamos por estudiar la circulación global del trabajo matemático identificando los planos del ETM idóneo que los alumnos y el profesor eligen utilizar durante la sesión. También observamos las responsabilidades respectivas asumidas por el profesor y los alumnos a lo largo del trabajo matemático. La activación (o no) de uno o varios planos verticales muestra la naturaleza real del trabajo matemático y, por tanto, proporciona información sobre la naturaleza del contrato didáctico.

Este planteamiento debería permitirnos responder, en particular, a las siguientes preguntas. ¿Se basa realmente este contrato en las matemáticas, se ajusta a las expectativas de referencia? ¿Son correctos los resultados según criterios puramente matemáticos?

#### 2.1.4 Cuestión de investigación

Ahora podemos formular nuestra pregunta de investigación en los marcos teóricos que sirven de referencia para el estudio: TSD y ThETM.

*¿Cómo identificar y caracterizar los contratos fuertemente didácticos en relación con el trabajo matemático que surgen cuando los profesores asignan una tarea en el aula?*

Como se ha mencionado anteriormente, el estudio de los contratos didácticos en relación con el ETM *idóneo* debe basarse en la observación y el análisis de las sesiones de clase. A efectos de nuestro estudio, se consideran dos estados del ETM *idóneo*: un estado potencial, que corresponde a lo previsto por el profesor, y un estado efectivo, que muestra el trabajo realmente realizado en el aula. El *ETM idóneo potencial* es diseñado por los profesores para sus alumnos y desarrollado antes de la puesta en práctica de la situación didáctica en el aula. Proporcionará información sobre el contrato didáctico correspondiente a lo que el profesor desea conseguir. Por el contrario, el *ETM idóneo efectivo* resulta de la práctica y proporciona información sobre el contrato didáctico que ha surgido realmente. En este estudio, subrayamos la correspondencia o el desfase entre estos dos tipos de contrato.

## 2.2 Fuentes de datos e instrumentos de análisis

En esta sección, describimos en primer lugar las fuentes de datos utilizadas para el estudio (2.2.1), luego presentamos la *codificación* que nos ofrece una visión global de las *trayectorias* o *camino*s observados durante las sesiones (2.2.2). A continuación, resumimos los tres puntos principales en los que se centra este estudio (2.2.3). En la sección 3 se ofrece un análisis *a priori* de la tarea y de su puesta en práctica en el aula.

### 2.2.1 Fuentes de datos

El estudio se basa en un conjunto de datos recogidos durante un curso de formación de profesores sobre probabilidad matemática. La formación global del profesorado se estructuró en tres bucles en los que participaron distintas personas y distintos modos de aplicación.

- El bucle 1 tuvo lugar antes de la formación y en él solo participaron una profesora experimentada, Lucie (35 años), y uno de los investigadores (Masselin). Lucie aplicó la tarea de la liebre y la tortuga en su clase de 9º curso antes de participar en la formación como formadora. En el bucle 2 se utiliza una grabación de vídeo de su clase.
- Bucle 2: esta parte central se inspira en el modelo Lesson Study, adaptado al contexto francés (Masselin *et al.*, 2020). Los profesores, divididos en dos grupos diferentes, tuvieron que diseñar colectivamente una situación instructiva, basada en la misma tarea, que luego fue implementada en dos aulas por un profesor de cada grupo y observada por el resto del grupo. Emma (33 años)

es la participante del grupo 1 que implementó la situación en un aula<sup>1</sup>.

- El bucle 3 tiene lugar después de la formación y se espera que los profesores asignen la tarea en sus aulas, como hizo Christian (42 años, participante del grupo 2).

Por lo tanto, en este artículo nos centramos en los contratos didácticos y en el ETM idóneo de los que informan tres de los profesores, Lucie, Emma y Christian. Se recogieron los siguientes datos de cada participante: la preparación de Lucie y una entrevista, una filmación de su sesión de clase y las grabaciones de audio de sus alumnos trabajando; la preparación colectiva de Emma realizada durante el curso de formación, la observación de los profesores escrita durante su sesión de clase y las producciones de los alumnos; la preparación de la clase de Christian y los datos de aplicación obtenidos mediante entrevista.

## 2.2.2 Itinerarios, caminos y códigos

Para la descripción de los diferentes ETM idóneo potenciales y efectivos de los profesores, introducimos una distinción entre itinerario (ruta planificada) y camino (ruta real). El primero proporciona información sobre las posibles elecciones realizadas por los profesores y planificadas antes de la sesión en su ETM idóneo potencial. A continuación, estos itinerarios se compararon con los caminos observados en el ETM idóneo efectivo. El ETM idóneo efectivo da cuenta del progreso del trabajo especificando las intervenciones del profesor y las interacciones con los grupos de estudiantes cuando resuelven juntos la tarea “La liebre y la tortuga”. Para ello, presentamos diagramas que representan la dinámica y el trabajo de circulación de cada grupo de estudiantes en su ETM idóneo efectivo (Masselin, 2019). En particular, estos diagramas ponen de relieve lo que ocurre cuando el profesor interactúa con un grupo. Destacan la dinámica temporal de los intercambios entre el profesor y los grupos de estudiantes. Así, derivamos una visión global de la dinámica del aula utilizando cronogramas (apéndice 1) que ofrecen una línea temporal de las interacciones del profesor con cada grupo de alumnos (Masselin, 2020).

Los itinerarios (rutas planificadas) y los caminos (rutas reales) se representan mediante gráficos direccionales y de colores. Los gráficos deben leerse de derecha a izquierda, y los acontecimientos se suceden según la cronología que hayamos

---

<sup>1</sup> Agustín, encargado de la puesta en práctica para el grupo 2, no siguió el plan previo y común de la sesión y adoptó un contrato poco didáctico al ignorar las reacciones de los alumnos (Masselin, 2020).

podido identificar durante la sesión de clase o en los preparativos de la sesión. Las flechas reflejan las interacciones entre profesores y alumnos y los vértices coloreados reflejan las distintas elecciones realizadas en función de las dimensiones de génesis o planos verticales implicados. Los símbolos utilizados para describir los itinerarios y caminos se enumeran a continuación y se resumen en la tabla 1.

**Tabla 1.** Código utilizado para los itinerarios y los gráficos de trayectorias.

Profesor	 Devolución	 Institucionalización	 Institutionalizar pero no sobre el contenido
Alumno	 Acción	 Resultado	 Formulation Comunicación
Plano ETM Activado	 [Sem-Ins]	 [Ins-Dis]	 [Sem-Dis]
Dimensión privilegiada	 Semiotica	 Instrumental	 Discursiva

Fuente: elaboración propia.

Las intervenciones específicas del profesor se representan en un disco: (D) que designa la devolución, (I) la institucionalización y (I barrado) la institucionalización no relacionada con las cuestiones probabilísticas de la situación. Todos los factores que dependen de los alumnos se representan con un rombo. Su trabajo se marca con una (A) si se trata de una acción, y esta acción puede producir resultados (R).

El profesor puede pedir a los alumnos que formulen y comuniquen (F). El objetivo es que expliquen tanto sus resultados, si los hay, como los procedimientos que emplearon para obtenerlos. La fase de institucionalización permite al profesor explicar los conocimientos que se esperan de los alumnos al final de la sesión. Los planos del ETM activados ([Sem-Ins], [Ins-Dis] o [Sem-Dis]) se identifican mediante tres colores distintos: verde, rojo y azul. Estos colores representan así el trabajo matemático desarrollado a lo largo de la sesión.

A partir del análisis de la codificación, podemos identificar ciertos patrones y detectar su repetición a lo largo de la sesión. Esta repetición —cíclica o lineal— da ritmo al trabajo, apoya el contrato didáctico y ayuda a describirlo. De acuerdo con la noción de ritmo de Lefebvre (1992), la repetición no excluye las diferencias y variaciones. Podemos identificar variaciones según el código de colores y la organización de cada patrón.

## 2.2.3 Focos de atención

En nuestro estudio y análisis de las sesiones, prestamos especial atención a los siguientes puntos en relación con la descripción del ETM idóneo:

1. Devolución e institucionalización para obtener información sobre las responsabilidades del profesor a lo largo del trabajo realizado.
2. Circulación del trabajo que realizan los alumnos mediante la identificación de los planos (o semiplanos) que favorecieron durante su trabajo. También utilizamos el contraste entre las fases de las acciones de los alumnos (sin intervención del profesor) y las fases de las formulaciones de sus resultados por parte de los alumnos (ya sean formulaciones privadas o presentadas al profesor).
3. La realidad y corrección del trabajo matemático realizado. Este punto nos permite distinguir entre contratos débil y fuertemente didácticos. Este documento se centra en los contratos fuertemente didácticos.

## 3. La tarea y la situación didáctica

### 3.1 La tarea de la liebre y la tortuga

La tarea “La liebre y la tortuga” utilizada para este estudio es emblemática del trabajo matemático que se espera en Francia en las lecciones sobre probabilidad matemática de los planes de estudios de 9º curso. Se desarrolla en los libros de texto franceses utilizados por los profesores, además de estar ampliamente implementada en las aulas de todo el país. En la sesión de formación de profesores estudiada para esta investigación (Masselin, 2019; Henríquez *et al.*, 2022), se utilizó el siguiente enunciado:

#### *La liebre y la tortuga*

Se celebra una carrera entre la liebre y la tortuga, con un dado de 6 caras bien equilibrado en un hipódromo cuadrado.

Esta carrera se desarrolla del siguiente modo:

- En cada ronda de la carrera se lanza el dado:
  - Si el dado cae en 6, la liebre llega directamente a la meta.
  - De lo contrario, la tortuga avanza una casilla.

- Gana el primero que llegue a la última casilla.
  - Se completan tantas rondas como sea necesario hasta que haya un ganador.

¿Quién tiene más posibilidades de ganar, la tortuga o la liebre?

El número de casillas disponibles en la carrera es una variable didáctica importante del problema. Lucie ha elegido un enunciado con seis casillas.

Los valores de probabilidad dependen del número de casillas de la carrera y son los más cercanos cuando el número de casillas es 4 (tabla 2). En este caso, es necesario apoyar la simulación en numerosas vueltas para asegurarse experimentalmente de que se observa la diferencia entre ambos valores.

**Tabla 2.** Variación de los valores de probabilidad en función del número de casillas disponibles para una carrera.

<b>Number of squares for the race</b>	<b>P(Tortoise) Exact value</b>	<b>P(Tortoise) Approximate value</b>	<b>P(Hare) Exact value</b>	<b>P(Hare) Approximate value</b>
3	$\frac{125}{216}$	0.579	$\frac{91}{216}$	0.421
4	$\frac{625}{1296}$	0.482	$\frac{671}{1296}$	0.518
5	$\frac{3125}{7776}$	0.402	$\frac{4651}{7776}$	0.598
6	$\frac{15625}{46656}$	0.335	$\frac{31031}{46656}$	0.665

Fuente: elaboración propia.

Según el plan de estudios oficial francés, debe realizarse una simulación del experimento aleatorio para obtener un primer valor de la posible solución. Dos modelos probabilísticos pueden realizar la simulación. El primero es congruente al nivel semántico con la situación, pero es difícil de programarlo. Puede representarse mediante un árbol que describe fielmente la evolución del juego. A un nivel matemático más avanzado, puede identificarse mediante una ley geométrica truncada.

En el segundo enfoque, basado en la ley binomio y no congruente con la situación, se realizan seis lanzamientos consecutivos de los dados antes de decidir si ha ga-

nado la tortuga o la liebre. La liebre gana cuando hay al menos un 6 en la serie de lanzamientos.

### 3.1.2 La situación pedagógica asociada a la tarea: un estudio *a priori*

El itinerario completo establecido en el plan de estudios oficial se describe y resume en la tabla 3. Antes de completar la tarea, los alumnos han aprendido a calcular probabilidades sencillas de sucesos equiprobables. También han utilizado ya una hoja de cálculo para simular el lanzamiento de un dado.

Tres fases principales, con subfases, pueden considerarse elementos constitutivos de la situación instructiva asociada a la tarea.

**Tabla 3.** Las diferentes fases del ETM de referencia

<i>Expl.: Exploración y explicación de la situación aleatoria</i>	<i>Expl. 1: Descubrimiento del problema Expl. 2: Aclaración de las reglas del juego Expl. 3: Aclaración del experimento aleatorio</i>
<i>Sim.: La simulación</i>	<i>Sim. 1: Justificación del uso de la simulación Sim. 2: Simulación real Sim. 3: Conclusión de la simulación</i>
<i>Prueb.: Desarrollo de una prueba</i>	<i>Prueb. 1: Prueba experimental Prueb. 2: Prueba sin simulación Prueb. 3: Institucionalización de la prueba</i>

Fuente: elaboración propia.

En cada una de estas fases, el trabajo matemático esperado es diferente y se puede caracterizar utilizando los planos verticales del ETM (sección 2.1.2.).

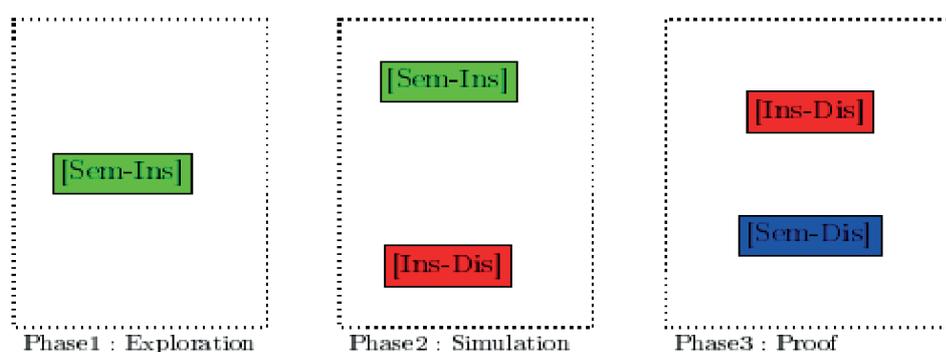
1. El objetivo de la primera fase (Exploración) es que los alumnos descubran la situación aleatoria y se aseguren de que han comprendido las reglas del juego. Para ello, se pide a los alumnos que jueguen algunas partidas. El trabajo matemático implica esencialmente signos, definiciones y reglas, así como artefactos materiales relacionados con el juego. Se sitúa en el plano [Sem-Ins], codificado en rojo.
2. La simulación propuesta en la segunda fase no es necesaria para responder a la pregunta, pero se pide explícitamente en el ETM de referencia. En consecuencia, el trabajo matemático se orienta hacia un trabajo experimental en el que la probabilidad, la estadística y los algoritmos pueden movilizarse en mayor o menor medida en función de las opciones elegidas por el profesor. La simulación es un

punto delicado. El trabajo de los alumnos se situará en el plano [Ins-Dis] si el modelo en el que se basa la simulación es identificado e implementado por los alumnos. Si, por el contrario, el profesor identifica el modelo y programa la simulación, el trabajo de los alumnos se situará en el plano [Sem-Ins].

3. La tercera fase consiste en producir la prueba del trabajo y hay dos caminos posibles. En la primera, Prueb.1, la prueba es experimental y se basa en los resultados de la simulación ([Sem-Ins]). La segunda, Prueb.2, es una prueba deductiva basada en un modelo probabilístico sin ningún uso de la simulación. Esta prueba se sitúa en el plano [Sem-Dis], codificado en azul.
4. Esta fase es la de la institucionalización final.

En resumen, la circulación prevista del trabajo matemático entre los distintos planos del ETM de referencia puede esquematizarse mediante el siguiente diagrama:

**Figura 2.** Los diferentes planos del ETM de referencia



Fuente: elaboración propia.

Los profesores tienen un grado significativo de libertad para diseñar el posible ETM<sup>i</sup> idóneo que pondrán en práctica en sus aulas. La figura 2 sirve tanto para identificar los itinerarios planificados por los profesores como los caminos recorridos por ellos y sus alumnos en el efectivo ETM<sup>i</sup> idóneo efectivo. Esto nos ayudará a aclarar el desfase entre lo planificado y lo realmente implementado. Además, los enunciados de las tareas difieren de un profesor a otro, como se ha observado en nuestro estudio. Los puntos que pueden variar son, por ejemplo, el número de casillas para una carrera (seis en la declaración de Lucie, cuatro en la de Emma y cinco en la de Christian), los artefactos disponibles (datos, ordenador, etc.), el modelo probabilístico y el software para la simulación (hoja de cálculo, Scratch o ambos).

## 4. Descripción y caracterización de algunos contratos fuertemente didácticos

En esta sección, presentamos los diferentes contratos fuertemente didácticos puestos de relieve por nuestro estudio. En la subsección 4.1, la comparación de los itinerarios previstos en el potencial y los caminos realizados en el ETM idóneo efectivo muestra una divergencia real entre los dos contratos observados en la sesión de Lucie. En cambio, los dos contratos observados en la sesión de Emma están próximos y pueden considerarse similares. A continuación, en la sección 4.2, nos centramos en la institucionalización concluyente que completa la resolución de la tarea.

### 4.1 Entre el contrato potencial constructivo y el contrato efectivo constructivo monitorizado: la sesión de Lucie

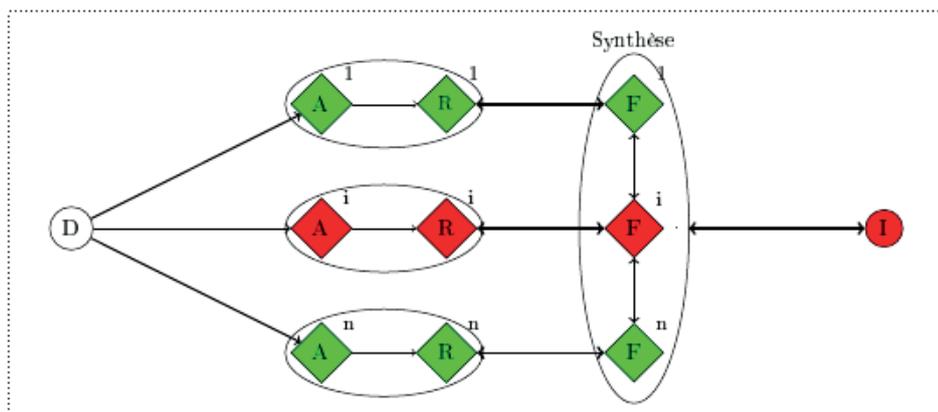
#### 4.1.1 Un contrato potencial constructivo

A partir del análisis de la preparación de las clases de Lucie, derivamos la siguiente codificación de los itinerarios previstos en el ETM idóneo potencial, como se explica a continuación.

Para su devolución de la tarea, Lucie planeó proporcionar el enunciado de la tarea (3,1,1) a grupos de alumnos, e iniciar su actividad diciendo simplemente: *Os dejaré resolver el problema*. El disco blanco alrededor de la D indica la intención de Lucie de no orientar el trabajo hacia una forma específica de trabajo: la devolución es muy abierta. Pero, para orientar después el trabajo de los alumnos, tiene previsto decirles que pueden utilizar los dados que tiene en su mesa (Expl. In [Sem-Ins]), y también les dará la oportunidad de utilizar ordenadores (Sim.). Prevé dos tipos de trabajo: uno basado en la repetición del juego y otro en el uso de un modelo probabilístico (implícitamente binomial).

Según Lucie, los alumnos, trabajando en pequeños grupos, deben empezar a actuar (A) y producir resultados (R). A continuación, a partir de la formulación y discusión de sus diferentes resultados, pretende proponer una síntesis colectiva. Los objetivos (conocimientos y procesos) del trabajo realizado se institucionalizarán y validarán mediante una prueba de tipo experimental (Pro.1), con una explicación del modelo utilizado para la simulación [Ins-Dis].

**Figura 3.** Itinerarios (rutas planificadas) en el ETM idóneo potencial en la sesión de Lucie



Fuente: elaboración propia.

El contrato didáctico que se desarrolla promueve la emergencia del conocimiento a partir del trabajo de los alumnos. Llamamos a este contrato un contrato didáctico constructivo, relacionado con un enfoque socioconstructivista del aprendizaje por el que los estudiantes encuentran los resultados por sí mismos a través de una tarea bien elegida.

También observamos que Lucie pretendía fomentar el trabajo matemático de los alumnos en el plano [Ins-Dis], aunque pensaba que la mayoría de los grupos optarían por el plano [Sem-Ins]. En ambos casos, la dimensión instrumental es central, las variaciones residen en el papel del modelo probabilístico (figura 3).

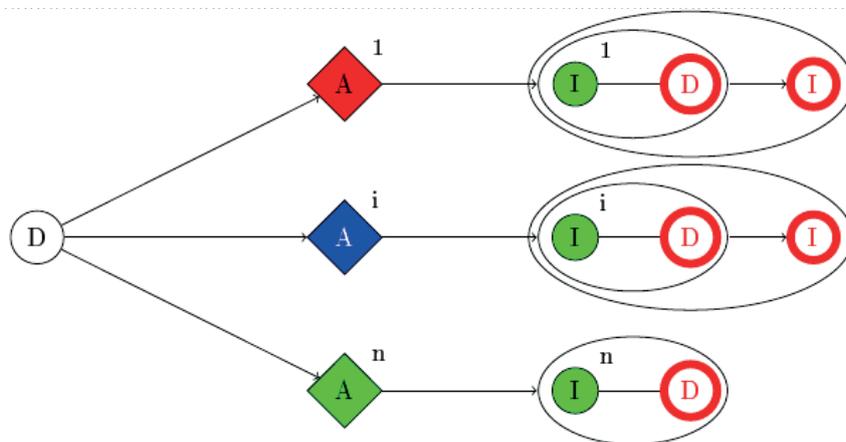
#### 4.1.2 Un contrato constructivo efectivo monitorizado

Gracias al cronograma, pudimos observar con detalle el desarrollo de la sesión y las interacciones entre el profesor y los distintos grupos de alumnos. Se observó una gran diversidad de acciones de los alumnos, que no todas se ajustaban a las expectativas del profesor.

Tras la devolución, cuatro grupos (2, 3, 5 y 7) tiraron los dados, jugaron a varios juegos y trabajaron en el plano [Sem-Ins]. Dos grupos (6 y 8) intentaron utilizar una simulación de hoja de cálculo, como había previsto el profesor. Pero los dos grupos restantes (1 y 4) optaron por utilizar árboles y empezar a calcular la probabilidad sin ninguna simulación. Su trabajo condujo a una prueba discursiva mediante árboles, que se sitúa principalmente en el plano [Sem-Dis]. Esta variedad dio lugar a tres ramas representadas por una fase de acción situada en los tres planos del ETM

después de la primera devolución. Esto dio a la profesora la oportunidad de hacer que sus alumnos se involucraran en todos los planos del ETM para la fase de síntesis. Sin embargo, no eligió esta opción (figura 4).

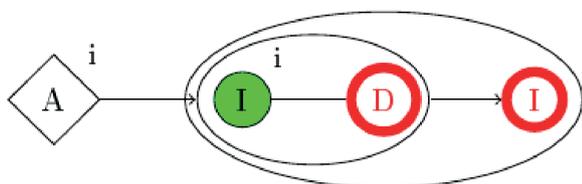
**Figura 4.** Trayectorias seguidas en el ETM idóneo efectivo: sesión didáctica de Lucie



Fuente: elaboración propia.

A partir del cronograma de la sesión, observamos la repetición del mismo patrón (figura 5).

**Figura 5.** Interacciones entre los grupos y la profesora (Lucie)



Fuente: elaboración propia.

Una visión más cercana del grupo 6 muestra que la profesora gestionó y redujo la variedad del trabajo de sus alumnos. Este grupo quería simular una carrera inicial y establecer un primer lanzamiento en la hoja de cálculo. Su trabajo se inició en el plano [Sem-Ins] utilizando el modelo geométrico truncado implícito. Entonces, los alumnos se encontraron con un obstáculo porque no sabían cómo programar una prueba en función del resultado del primer lanzamiento (6 o no 6) [Ins-Dis]. El profesor intervino y les pidió que abandonaran este método y realizaran sistemáticamente seis lanzamientos por carrera en la hoja de cálculo. Su devolución se guiaba por la ley binomial, pero solo dio a los alumnos una tarea técnica. No entendieron por

qué, porque esta modelización no era coherente con la situación (3.1.1). La nueva y local devolución de Lucie está representada por una D roja rodeada por un círculo rojo, para subrayar el hecho de que el trabajo de los alumnos estaba orientado a la dimensión instrumental.

Lo mismo ocurrió con otros grupos que utilizaron otros métodos. En particular, en el grupo 4, los alumnos calcularon los valores de probabilidad utilizando árboles y sin simulación y trabajaron en el plano [Sem-Dis]. Pero la profesora les paró y les pidió que simularan la situación en la hoja de cálculo utilizando el mismo método que había indicado al grupo 6.

Examinando el cronograma de la sesión, podemos seguir la repetición de este patrón y observar cómo el profesor controlaba la propagación de la simulación basada en el mismo modelo. Las diferentes trayectorias del ETM idóneo efectivo fueron homogéneas a lo largo de la puesta en práctica de la situación en los diferentes grupos. Consideramos que solo se activa un semiplano [Ins]-(Ref), porque no hay construcción de razonamiento discursivo: el método se da sin justificación y se privilegia la dimensión instrumental. No hubo institucionalización conclusiva al final de la sesión.

Llamamos a este contrato didáctico *contrato didáctico monitorizado*. El método a seguir es impuesto sistemáticamente por el profesor y no por la retroalimentación del *medio* como en el enfoque de Brousseau. El contrato efectivo es diferente del contrato potencial.

## 4.2 Contratos socráticos (o mayéuticos) multilineales: la sesión de Emma

En la sesión de Emma, identificamos los contratos didácticos potenciales y eficaces. Esto se basa en una repetición de patrones en los que se dan subtarefas precisas y limitadas a los alumnos.

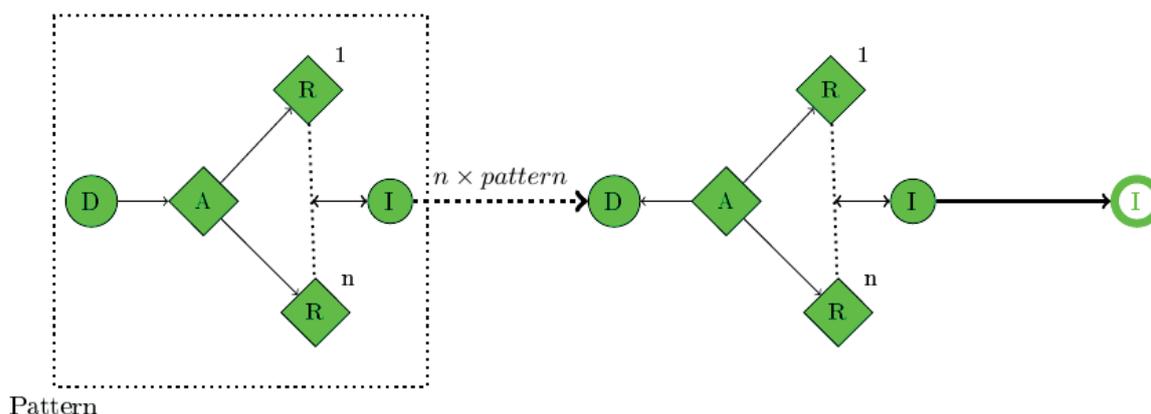
### 4.2.1 Un contrato potencial socrático multilineal

Emma preparó su sesión con otros profesores durante el acto de formación del profesorado. Se planificó una primera fase de exploración (Expl.): cada grupo de alumnos debe lanzar un dado de espuma cinco veces. Emma quería asegurarse de que todos los alumnos entendían las reglas del juego (Expl.2). Su trabajo se sitúa en el plano [Sem-Ins]. La primera fase debía motivar la simulación (Sim. 1) y, a continuación, se entregó a los alumnos un archivo de simulación (Sim. 2). Después

de utilizar el fichero de simulación, los grupos tenían que completar una tabla con los resultados de cada juego y calcular las frecuencias correspondientes. Por último, se pidió a los grupos de alumnos que dibujaran los puntos  $(n, f_n)$  en una hoja de papel en la que ya se habían proporcionado la escala y el eje.

Las distintas fases del ETM idóneo potencial se organizaron en una sucesión de patrones similares. Estos patrones se componían de una devolución inicial (1) y una fase de acciones de los alumnos que conducían a diversos resultados (2). Una institucionalización local (3) se daba sobre un punto preciso (la regla del juego, los resultados de los cinco lanzamientos impuestos para cada grupo, etc.) y permitía a todos los alumnos avanzar en su trabajo casi simultáneamente. A esta institucionalización local siguió una nueva devolución que relanzó el trabajo y dio ritmo a la sesión. En la sesión de Emma, el plano verde [Sem-Ins] fue siempre el preferido por los alumnos en su trabajo<sup>2</sup>.

**Figura 6.** Rutas planificadas y caminos tomados en los ETM idóneo, Emma



Fuente: elaboración propia.

Esta sucesión de tareas bien guiadas con expectativas de conocimiento se asocia a un contrato didáctico socrático (el Meno de Platón). Como los alumnos emprendieron acciones diferentes y produjeron resultados distintos, calificamos el contrato de multilineal (o multidireccional).

<sup>2</sup> Un examen más detallado del trabajo real puede llevar a marcar con una cruz el símbolo R o A cuando los alumnos son bloqueados y no obtienen el resultado.

## 4.2.2 ETM idóneo efectivo de Emma

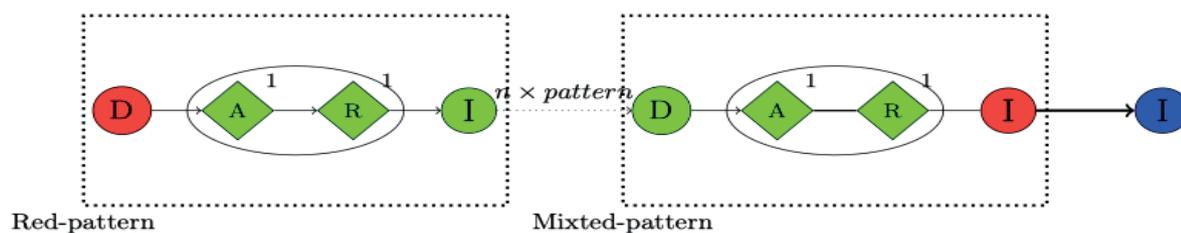
Durante la sesión, Emma siguió lo que había planeado hacer. Por lo tanto, el gráfico de trayectorias se aproxima al gráfico de itinerarios, pero nuestra observación proporciona información sobre las interacciones entre los alumnos y el profesor. En cada patrón, los alumnos trabajan en grupos y tienen subtareas que realizar (jugar a cinco juegos, completar una tabla, crear un gráfico). El profesor proporciona una herramienta de simulación lista para usar que se ejecuta en Scratch y no, como estaba previsto, en diferentes dispositivos.

Tres de los cinco episodios identificados (episodios 1, 3 y 4, apéndice 2) siguen un patrón idéntico al del contrato potencial: una devolución y, a continuación, una fase de acción que potencia varios resultados (en función del grupo de alumnos). En función de los resultados, el profesor proporciona una breve institucionalización local. Se dan nuevas subtareas hasta que se formula la institucionalización final. Los dos episodios son diferentes y están relacionados con los contratos de institucionalización (sección 4.3): local en el episodio 2 (5 minutos) y concluyente en el episodio 5. En conclusión, el contrato global es la combinación de un contrato socrático y de contratos específicos en relación con la institucionalización.

La sesión fue observada por todos los profesores que participaron en la formación. Recomendaron añadir subtareas, lamentando que los alumnos fueran meros ejecutores lanzando el software. Después del segundo episodio, sugirieron que los alumnos descubrieran y discutieran el archivo Scratch. También se modificó la devolución del episodio 4 para ayudar a los alumnos a definir y calcular frecuencias por sí mismos. Como resultado de estas adiciones, la codificación por colores de los diferentes patrones cambió y modificó el trabajo matemático, aunque su ritmo siguió siendo el mismo. El trabajo matemático no se situó exclusivamente en el plano [Sem-Ins], sino que se trasladó a [Sem-Dis] (discusión del guion y el modelo, investigación de la definición de frecuencias) o [Ins-Dis] (descripción de una carrera con Scratch y métodos de cálculo de frecuencias).

Para complementar el caso de Emma, nos referimos brevemente a la sesión de Christian, que muestra una versión simplificada del contrato socrático. Tras asistir al acto de formación, Christian dedicó tres sesiones de 55 minutos a la tarea con sus alumnos. El contrato didáctico de Christian era similar al de Emma, pero lo llamamos contrato socrático *lineal* porque no propuso varios caminos a los alumnos, como hizo Emma. En su contrato, los alumnos actuaban siempre en el plano [Sem-Ins] mientras que el profesor realizaba el trabajo en los otros planos.

Figura 7. Trayectorias recorridas en el ETM idóneo efectivo, Christian



Fuente: elaboración propia.

### 4.3 Los contratos específicos y evolutivos de la institucionalización final

La institucionalización final trata de un contenido específico y suele cerrar una sesión (o una serie de sesiones) sobre un tema o problema matemático determinado. La imparte el profesor a toda la clase y no solo a un alumno o grupo de alumnos.

En su estudio sobre las fases de institucionalización en las aulas ordinarias, Hersant y Perrin-Glorian (2005) describen cómo los profesores introducen una forma de diálogo con los alumnos, denominada DIS (discusión interactiva de síntesis). Los profesores utilizan las respuestas de los alumnos para mostrarles los errores que hayan podido cometer y recordarles los conocimientos previos. Además, guían a los alumnos hacia la solución mediante una forma de contrato similar al contrato socrático, con una mayor frecuencia de preguntas de los profesores y respuestas muy breves de los alumnos. En nuestro estudio, encontramos este mismo fenómeno que identificamos con nuestras herramientas. En particular, observamos la codificación por colores del trabajo, así como la participación de los alumnos en su desarrollo.

#### 4.3.1 Evolución hacia un contrato socrático basado en la visualización: la institucionalización final de Emma

Emma comparó primero los valores obtenidos por los distintos grupos de alumnos para 2.000 carreras. Utilizó el término "aleatoriedad" para destacar la diversidad de los resultados. A continuación, proyectó el gráfico de un grupo que obtuvo una frecuencia de 0,52 de que ganara la liebre (el valor esperado). A continuación, Emma abrió un archivo Scratch preparado que presentaba simulaciones de 15 y 1.000 carreras. Concluyó la sesión dibujando una línea recta hacia la que parecen converger los datos resultantes, y escribió: "Cuanto más simulamos el experimento,

más se acercan las frecuencias observadas a un valor: la probabilidad”, y añadió que esto se ajusta a la “Ley de los grandes números”.

Emma estableció una síntesis de discusión interactiva y mostró a los alumnos lo que debían saber y reproducir, pero sin darles definiciones precisas ni pruebas formales. Las interacciones se situaron en el plano [Sem-Ins] y Emma insistió en utilizar la visualización y los signos, favoreciendo la dimensión semiótica que da su código de color semiótico al trabajo. El contrato se aproxima al contrato de ostensión de Brousseau (Brousseau, 1997; Salin, 1999).

#### 4.3.2 Evolución hacia un contrato socrático basado en un enfoque lectivo: la institucionalización concluyente de Christian

El estilo de Christian es muy común, y lo hemos observado en otras situaciones de instrucción. Concluyó su sesión proporcionando una prueba formal a sus alumnos, sin referirse a la simulación anterior. Explicó que la tortuga gana si, y solo si, seis lanzamientos consecutivos del dado son diferentes de 6, de ahí que el valor de la probabilidad sea  $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ . Proporcionó un atajo para la fase de simulación (Sim.), que puede obtenerse directamente después de la fase de exploración (Expl.). Christian desarrolló pruebas formales basadas en el referencial. El trabajo matemático del profesor se situaba exclusivamente en el plano [Sem-Dis] y favorecía la dimensión discursiva. Aquí, se supone que los alumnos son oyentes atentos y activos. El contrato didáctico se identifica como un contrato socrático basado en un enfoque de tipo conferencia. En la sesión didáctica de Christian, el profesor ignora el trabajo de simulación de los alumnos y las interacciones profesor-alumno son limitadas.

## 5. Conclusiones, debate y perspectivas

### 5.1 Conclusiones

#### 5.1.1 Reconocer y caracterizar los contratos didácticos mediante la identificación de patrones y ritmo

Nuestra descripción y caracterización de los diferentes contratos fuertemente didácticos se basa en los *constructos* teóricos de las TSD y ThETM. La devolución y la institucionalización (parcial o global) se refieren al TSD y destacan los principales episodios que apoyan el análisis en términos de ThETM. El uso de los diferentes planos del ETM muestra la naturaleza del trabajo implicado en las diferentes acciones

de los estudiantes, así como la circulación del trabajo. También pone de relieve las responsabilidades respectivas de alumnos y profesores en la progresión del trabajo.

Para el análisis de los ETM idóneo potenciales y efectivos, diseñamos y aplicamos un sistema de codificación basado en estos constructos. Esto nos permitió representar los distintos itinerarios y caminos y observar la repetición de ciertos patrones. Esta repetición confiere a la sesión su ritmo y su código de colores, elementos importantes para la identificación de los contratos.

### 5.1.2 Dos grandes familias de contratos globales: los contratos constructivos y los contratos socráticos

El contrato *constructivo* alude a un enfoque social y constructivista del aprendizaje y observamos allí una diferencia entre los contratos potenciales y los efectivos. El contrato potencial pretende ser abierto y animar a los alumnos a encontrar sus propias soluciones, que idealmente deberían llevarlos a construir o identificar el conocimiento objetivo. El contrato didáctico efectivo es un contrato constructivo supervisado en el que el profesor supervisa y regula el trabajo de los alumnos eligiendo el modelo probabilístico e imponiéndolo progresivamente a todos ellos. La diversidad de modelos probabilísticos y la variedad de pruebas inicialmente posibles se limitan progresiva y estrictamente a una simulación basada en un único modelo con un único artefacto.

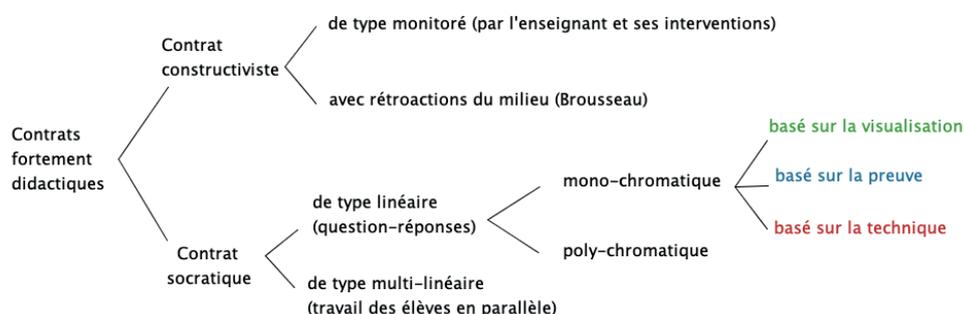
El *contrato socrático*, o *mayéutico*, se basa en un redescubrimiento guiado del conocimiento. Los profesores dividen la tarea principal en subtareas. El contrato socrático puede ser multilineal o lineal, según el grado de libertad que se dé a los alumnos. Observamos una sucesión de patrones que marcan fuertemente el ritmo de la sesión y caracterizan un contrato que oscila entre el profesor y el alumno: el profesor organiza y dirige la sesión, mientras que los alumnos siguen y aplican las directrices del primero.

### 5.1.3 Contratos locales para precisar el contrato global

La atención específica que prestamos a la fase de institucionalización reveló algunos contratos locales que difieren de los anteriores contratos didácticos globales identificados, pero que podría decirse que están relacionados con formas del contrato socrático lineal. Estos pueden basarse en una serie de interacciones en torno a las preguntas de los profesores y las reacciones de los alumnos. Dependiendo de la elección del profesor, el código de colores del contrato puede cambiar.

Puede favorecer la dimensión semiótica y basarse en la visualización: en este caso, se aproxima al contrato de ostensión de Brousseau. En otra forma, basada en la conferencia, el profesor favorece la dimensión discursiva e insiste en la prueba formal. Podemos conjeturar que existe un contrato centrado en la dimensión instrumental con dimensiones de construcción y cálculo. Consideramos que estas formas son relevantes para el surgimiento específico del contrato socrático. Aunque en nuestro estudio estos contratos aparecen durante la fase de institucionalización, probablemente puedan considerarse contratos globales (véase 5.2). Nuestro estudio ha dado como resultado una clasificación de contratos fuertemente didácticos (figura 8).

**Figura 8.** Clasificación de los contratos muy didácticos



Fuente: elaboración propia.

### 5.1.4 Diferentes naturalezas del contrato y del color del trabajo matemático

A partir de nuestro estudio, podemos concluir que el contrato global a lo largo de una situación de instrucción, y de hecho a lo largo de un programa de instrucción a largo plazo, puede no ser homogéneo. En concreto, su código o coloración puede cambiar. Como se mencionó anteriormente, el estudio de la circulación del trabajo a través de los diferentes planos del ETM, muestra los planos favorecidos en el trabajo matemático real. El código de colores revela las formas de trabajo matemático priorizadas por el profesor en el aula. Así, es posible afinar los contratos didácticos observando si el trabajo matemático es homogéneo y se sitúa siempre en el mismo plano, o si el profesor propone el acceso a diferentes planos. En particular, el código de colores especifica el significado que se da a los conocimientos, las técnicas y la visualización en el trabajo de los alumnos. Esta distinción es importante para identificar lo que es un contrato fuertemente didáctico: en efecto, existe una importante diferencia de naturaleza entre un contrato que privilegia las técnicas con o sin justificaciones, o uno basado en la demostración de pruebas, etc.

## 5.2 Debates

### 5.2.1 Comparación con los contratos identificados por Brousseau

En su densísimo estudio (Brousseau, 1997a), Brousseau (2.1.1) se basa en su larga experiencia como investigador y profesor para distinguir varias formas de contratos fuertemente didácticos. Enumera y describe detalladamente seis contratos, pero no proporciona explícitamente criterios para diferenciarlos y organizarlos. Nuestro enfoque, que se basa en esta investigación pionera, es diferente y se centra en un trabajo matemático que intenta categorizar los contratos existentes en la enseñanza escolar. La clasificación se estructura en torno a dos contratos principales (figura 8) con diferentes subformas o tipos según el ritmo y la coloración de algunos patrones identificados. Entre estos contratos, algunos tienen nombres similares a los de Brousseau, pero son diferentes: constructivo y socrático. Los contratos de ostensión y de reproducción están próximos a dos de los contratos monocromáticos (visual y de lectura). Parecían contratos locales durante la fase de institucionalización y pueden considerarse formas específicas del contrato socrático. Se trata de afirmar si el contrato global puede ser homogéneo y basarse en este tipo de contrato. Este parece ser el caso de la forma del contrato socrático basada en la conferencia, sobre todo en la enseñanza superior, donde el curso se centra en la transmisión de conocimientos organizados en un dominio matemático. En el caso del contrato visual, no es fácil imaginar esta forma como global, pero Salin (1999) ha destacado la alta frecuencia de la práctica ostensiva en la enseñanza elemental con niños pequeños. Los contratos didácticos parecen depender del nivel educativo, del tipo de formación (profesional o general) e incluso de la competencia de los alumnos en matemáticas.

### 5.2.2 Distinción entre teorías del aprendizaje y contratos didácticos

Como ya se ha mencionado, el contrato constructivo se inspira en el enfoque socioconstructivista del aprendizaje, pero no conservamos este nombre para denominar este contrato específico. Del mismo modo, no identificamos un contrato conductual. Ambas teorías son teorías del aprendizaje y no se relacionan explícitamente con la educación en un contexto académico en el que la importancia de la enseñanza de una disciplina y de los conocimientos académicos reside principalmente en las interacciones entre alumnos y profesores. A este respecto, también parece importante hacer una distinción clara entre las teorías del aprendizaje y los contratos didácticos: los contratos didácticos nos permiten explicar cómo se configura el conocimiento que se enseña.

Por otra parte, pueden existir distintos tipos de contrato para una misma concepción del aprendizaje. Por ejemplo, en el caso de las teorías socioconstructivistas, el contrato supervisado es una forma de gestionar el progreso del trabajo guiando a los alumnos a través del *feedback* del profesor. El enfoque de Brousseau es diferente porque se basa en la retroalimentación del *medio* (artefactos, resultados, etc.) para hacer avanzar los conocimientos de los alumnos y disminuir las intervenciones del profesor. Este enfoque abrió el camino a otra forma de contrato fuertemente didáctico que denominamos contrato de Brousseau o contrato a-didáctico.

### 5.2.3 Articulación entre contratos y trabajos matemáticos

Además de la distinción entre teorías del aprendizaje y contratos didácticos, también es necesario articular claramente los contratos y las formas del trabajo matemático. Estas formas dependen de la circulación del trabajo entre los diferentes planos del ETM. Para un mismo contrato didáctico global, las variaciones entre profesores se referirán a la elección de las tareas y, sobre todo, a su gestión en las aulas en las que se deja la iniciativa a los alumnos. Se les pueden asignar solo tareas rutinarias circunscritas al plano verde [Sem-Ins], o tareas más técnicas, lo que supone una articulación de las dimensiones discursivas en torno a la dimensión instrumental, plano rojo [Ins-Dis]; o finalmente, pueden tener un papel importante en el plano azul [Sem-Dis]. Cada una de estas formas puede vincularse a una visión particular del trabajo del alumno: la primera está orientada a la aplicación, la segunda al dominio de los aspectos técnicos y la última a la comprensión de la prueba discursiva. La articulación de todos los planos lleva a los alumnos a completar con éxito el trabajo matemático.

## 5.3 Perspectivas

El estudio de la relación entre los contratos fuertemente didácticos y las situaciones de instrucción proporciona una definición más precisa de estos contratos. Además, aporta elementos para describirlos, utilizando los patrones asociados a formas particulares de trabajo. El estudio también plantea nuevas cuestiones que nos proponemos explorar en futuras investigaciones.

### 5.3.1 Seguir desarrollando y completando el estudio de los contratos didácticos globales

Tenemos previsto utilizar la metodología desarrollada en esta investigación para seguir investigando los contratos identificados y describir otros tipos de contratos.

Tenemos que comprobar si los contratos dependen del nivel educativo (primaria, secundaria, universidad), del tipo de formación (profesional o general) o de la competencia de los alumnos en matemáticas, y de qué manera. Por ejemplo, en la universidad nuestro equipo está desarrollando un estudio multidisciplinar sobre las prácticas docentes. En él se identifican contratos asociados a clases magistrales impartidas en grandes aulas que se alternan con sesiones prácticas destinadas a clases más reducidas. La alternancia de contratos se basa en diferentes estructuras de enseñanza.

### 5.3.2 Estudiar las variaciones del trabajo matemático dentro de un determinado contrato didáctico

En este artículo, definimos el color del trabajo matemático observando y codificando los planos y las dimensiones del ETM movilizados. Es necesario un estudio más detallado para evaluar el impacto de esta coloración en los contratos didácticos. En efecto, podemos conjeturar que el hecho de ser siempre ejecutor, técnico o investigador influye en el contrato didáctico, ya que las expectativas de los alumnos son diferentes (Nechache, 2017). También podemos suponer que algunas de las reacciones a menudo negativas de los alumnos ante las matemáticas se deben a una enseñanza que los confina con demasiada frecuencia a un papel de repetidor y ejecutor. Esto plantea cuestiones relativas a la elección de las tareas que se dan a los alumnos, que pueden ser tareas ricas, complejas o simples (White y Mesa, 2014).

### 5.3.3 Ampliación de la formación del profesorado, utilización de nuestra codificación basada en la teoría ETM como herramienta de análisis de las sesiones de clase

La codificación, con los elementos de la teoría ETM utilizados, es relativamente sencilla de realizar y proporciona rápidamente una visión general del contrato aplicado. Las trayectorias y los caminos visualizados de este modo permiten identificar y discutir las formas de contrato que surgen en las situaciones de enseñanza. De este modo, sería posible poner de relieve las variaciones de los contratos a lo largo de una sesión, así como las diferencias entre el trabajo potencial y el trabajo real. En particular, este uso parece pertinente en el contexto de los estudios de lecciones, en los que los profesores necesitan argumentos para abordar lo que han observado.

## 6. Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1997a). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer academic publishers. Hal. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00699759>
- Brousseau, G. (1997b). Théorie des situations didactiques, le cours de Montréal. <https://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-mon-treal-1997/>
- Henriquez, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idone or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. En Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 121-146). Springer. [https://10.1007/978-3-030-90850-8\\_6](https://10.1007/978-3-030-90850-8_6)
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 113-151. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2183-z>
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. <https://10.1007/978-3-030-90850-8>
- Lefebvre, H. (1992). *Elements de rythmanalyse. Introduction à la connaissance des rythmes*. Syllapses.
- Masselin, B. (2019). *Étude du travail de l'enseignant sur la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité*. Doctoral dissertation, Université Paris Diderot. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02507438>
- Masselin, B. (2020). Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilités : Une étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 25, 49-88. <https://doi.org/10.4000/adsc.529>
- Masselin, B., Kuzniak, A. y Hartmann, F. (2020). Study of collaborative work developed as part of doctoral research articulated with a teacher training. En Borko, H. y Potari, D. (eds.), *ICMI Study 25, Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 238-245). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03198065>

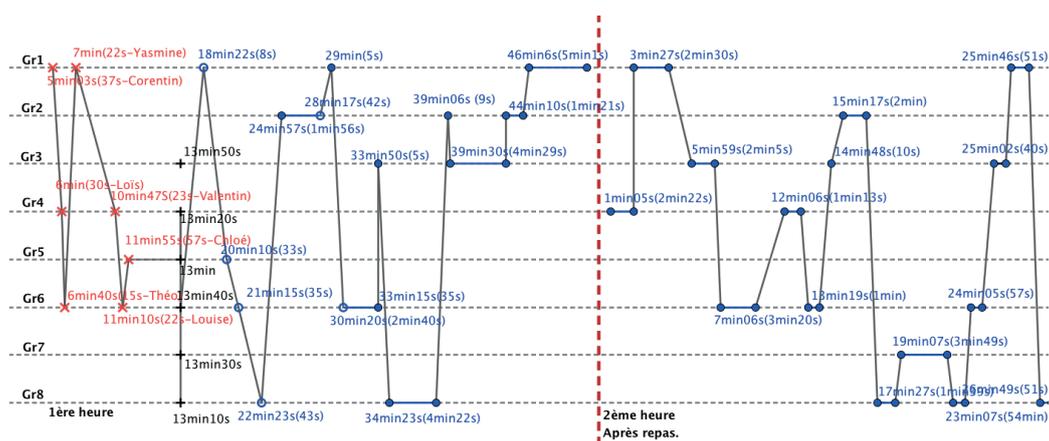
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 67-90. <https://doi.org/10.4000/adsc.709>
- Perrin-Glorian, M. J. y Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(2), 217-276.
- Radford, L. (2021). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense. <https://doi.org/10.1163/9789004459663>
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique [The didactic contract]. *Revue Française de Pédagogie*, 112, 85-118.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Salin, M. H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. En Lemoyne, G. y Conne, F. (eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Presses de l'Université de Montréal.
- Vandebrouck, F. (2018). Activity theory in french didactic research. En Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E. y Xu, B. (eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 679-698). ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- White, N. y Mesa, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 675-690. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0588-9>

## Apéndice 1: Cronograma

El cronograma es una herramienta metodológica que ayuda a visualizar la cronología de las interacciones entre el profesor y cada grupo de alumnos durante una sesión de clase. Las fechas y duraciones de cada una de estas intervenciones se recogen en una línea de tiempo.

Se identifican dos tipos de eventos y se dibujan de forma diferente en cada línea del grupo. Los puntos representan una intervención breve (menos de 30 segundos) del profesor sin intercambio con el grupo. Se marca una línea continua en la línea de grupo cuando existe una interacción más larga y significativa relacionada con el contenido matemático.

Las distintas intervenciones del profesor están unidas por segmentos y la línea discontinua muestra la cronología y el desplazamiento del profesor de un grupo a otro. El tiempo dejado al trabajo autónomo de los alumnos se marca con líneas discontinuas.



Fuente: Masselin, 2020; Henríquez et al., 2022.

## Apéndice 2: Identificación del patrón de Emma

Patrón	Tiempo	Tareas asignadas por el profesor
N° 1	16'	<p><i>Devolución</i></p> <p>10:08. Emma: "He aquí una actividad de descubrimiento, te daré el enunciado. Juega cinco partidas con los dados que tienes en tu mesa. Cuenta el número de veces que gana la liebre o la tortuga".</p> <p><i>Acción de los estudiantes</i></p> <p>Grupos de alumnos juegan a una serie de juegos y obtienen diferentes resultados.</p> <p><i>Síntesis e institucionalización local</i></p> <p>10:23. Emma recoge los resultados de cada grupo.</p> <p>10:25. Emma: <i>institucionalización local</i> "algunos encuentran la liebre; no hemos jugado suficientes partidos".</p>

Patrón	Tiempo	Tareas asignadas por el profesor
N° 2	5'	<p>10:25. <i>Explicación de las reglas del juego y justificación de la simulación</i> Emma tira su dado de goma y obtiene diferentes caras del dado. En cada lanzamiento, pide a los alumnos que ganan que se aseguren de haber entendido las reglas.</p> <p><i>Acción y resultados</i> Los alumnos responden a las preguntas de Emma en lanzamientos sucesivos. Cuando aparece un seis, Emma pregunta a la clase: “¿Quién cree que ganó la liebre?”. “¿Quién cree que la liebre tiene más posibilidades de ganar, basándose en su experimento?”. Emma escribió en la pizarra: “4 grupos Tortuga y 2 grupos Liebre”. Un estudiante dice: “Deberían hacerse más lanzamientos, por ejemplo, con una hoja de cálculo, ya que eso podría permitir varios cientos de lanzamientos”.</p> <p><i>Institucionalización.</i> Emma escribió en la pizarra: “Simulación, Hoja de cálculo, Scratch para lanzar varios cientos de lanzamientos”.</p>
N° 3	6'	<p><i>Devolución</i> 10:28. Emma: “Usando una hoja de cálculo o usando Scratch, puedes simular varios cientos de lanzamientos, el ordenador puede hacerlo por ti. Hacemos una simulación. Vamos al archivo... elegimos Scratch”.</p> <p><i>Acción</i> Cada grupo abre el archivo de simulación.</p> <p><i>Resultados</i> Ejecutan el programa varias veces para obtener varias simulaciones de juego.</p> <p><i>Institucionalización local. No es necesario</i></p>
N° 4	29'	<p><i>Devolución</i> 10:31. Emma: “Te conectas, ves la tabla y la rellenas. ¿Cuál es la frecuencia con la que gana la tortuga? Es el cociente del número de partidas ganadas por la tortuga sobre el número total de partidas”.</p> <p>0:34. Emma: “Vamos, tienes que rellenar la tabla y crear el gráfico”.</p> <p><i>Acción</i> Los grupos trabajan en sus tablas y gráficos.</p> <p><i>Resultados</i> Emma recoge las producciones de los grupos (tablas y gráficos).</p> <p><i>Pausa de 15 minutos para los estudiantes.</i></p>
N° 5	29'	11:34. Conclusión sobre la institucionalización.

Fuente: elaboración propia.



Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento-NonComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.