UCMAULE

REVISTA ACADÉMICA

Talca, Chile, julio-diciembre, 2024. N° 67. I.S.S.N: 0719-9872

Recibido: 04-06-24 | Aceptado: 25-09-24 | Publicado: 20-12-2024

LA COMPRENSIÓN DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM) EN BASE SEIS POR PARTE DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA Y SU INFLUENCIA EN EL ETM EN BASE DIEZ

THE UNDERSTANDING OF A MATHEMATICAL WORKING SPACE (MWS) IN BASE SIX BY FUTURE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS AND ITS INFLUENCE ON THE MWS IN BASE TEN

ESTUDIO

FLORENCE PETEERS
CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ. Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ. Rouen, LDAR,
París, Francia
florence.peteers@cyu.fr
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9517-7076

NORMA SEGURA-CORELLA
Université Paris Cité y Universidad de Costa Rica
París, Francia
norma.segura@ucr.cr.cr
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-0707-7219

LAURENT VIVIER
Université Paris Cité, Univ. Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, LDAR
París, Francia
laurent.vivier@u-paris.fr
ORCID: 0000-0002-9203-8756

Resumen

En el dominio matemático de los números la base diez juega un rol importante en la escolaridad primaria y secundaria, aunque no es absoluta del punto de vista matemático. Sin embargo, la mayoría de personas interpretan este rol como absoluto, obteniendo lo que se interpreta como un paradigma común o degenerado donde el número se confunde con su representación en base diez. Este artículo reporta los hallazgos de una experiencia con futuros profesores de primaria, en tercer año de licenciatura en Francia. Se propone una secuencia que permite construir un ETM para desarrollar el conocimiento de los números utilizando la base seis como sistema de representación, en paralelo del ETM en base diez. Se presenta el análisis de la circulación del trabajo matemático de los estudiantes, abordando diferentes aspectos de los números a través de las tres génesis. El estudio revela el establecimiento de un nuevo sistema de representación, la base seis, como un agente transformador del paradigma común tomando conciencia del papel no absoluto de la base diez.

Palabras clave: ETM, bases numéricas, paradigma, números, formación de profesores.

Abstract

In the mathematical domain of numbers, base ten plays an important role in primary and secondary schooling, although it is not absolute from the mathematical point of view. However, most people interpret this role as absolute, obtaining what is interpreted as a common or degenerate paradigm where the number is confused with its representation in base ten. This article reports the findings of an experience with future primary school teachers, in the third year of their bachelor's degree in France. A sequence is proposed to build an ETM to develop the knowledge of numbers using base six as a representation system, in parallel to the ETM in base ten. The analysis of the circulation of the mathematical work by students is presented, approaching different aspects of numbers through the three genesis. The study reveals the establishment of a new representation system, the base six, as a transforming agent of the common paradigm becoming aware of the non-absolute role of base ten.

Keywords: ETM, numerical bases, paradigm, numbers, teacher training.

1. Introducción

Los números y sus operaciones constituyen una parte importante de las matemáticas escolares, docentes y estudiantes dedican años a la enseñanza y aprendizaje del sistema decimal. Por ejemplo, en Francia los niños de 7 a 9 años "étudient différentes manières de désigner les nombres, notamment leurs écritures en chiffres, leurs noms à l'oral, les compositions-décompositions fondées sur les propriétés numériques (le double de, la moitié de, etc.), ainsi que les décompositions en unités de numération (unités, dizaines, etc.)" [estudian distintas formas de expresar los números, incluyendo su escritura en numerales, su denominación oral, la composición-descomposición basada en propiedades numéricas (el doble de, la mitad de, etc.) y la descomposición en unidades de numeración (unidades, decenas, etc.)] (Ministerio de la Educación Nacional y de la Juventud, 2024). Se trata de un dominio matemático complejo, cuyas técnicas son dominadas relativamente bien por los profesores, ya sean titulados o en formación. Sin embargo, se plantea la cuestión de la comprensión, sobre todo porque la mayoría de los profesores no tienen formación científica (y menos aún matemática) y algunos han tenido dificultades para aprender matemáticas en su formación básica.

Los estudios llevados a cabo en Francia (por ejemplo, Chambris [2010] y Tempier [2018, 2010]) constatan las dificultades que representa el aprendizaje y la compresión del sistema numérico que se utiliza actualmente y su operacionalización. Anselmo y Zucchetta (2013) vinculan tales dificultades con el uso de métodos clásicos de enseñanza, centrados en la mecanización de algoritmos y reglas. Tempier (2010), a partir de un análisis del sistema educativo francés, subraya la importancia de proporcionar a los profesores recursos que les ayuden a comprender los conceptos esenciales de la numeración decimal para gestionar eficazmente los errores y dificultades vinculados con reconocer, comprender y operar con agrupaciones.

¿Cómo aprenden y comprenden los maestros el sistema de numeración decimal? En general, los maestros desarrollan una comprensión del sistema numérico decimal no científica, a menudo con una relación frágil y conflictiva con las matemáticas, mediante una sucesión de símbolos aprendida de memoria y que está regida por ciertas reglas y algoritmos. La dificultad de la formación radica en que, por lo general, los profesores en formación no consideran necesario profundizar en el sistema decimal, ya que sus conocimientos técnicos son suficientes para resolver problemas. Sin embargo, esta comprensión es importante para la enseñanza, de modo que no se limite a aplicar las técnicas a signos numéricos. Con ello, se plantea la siguiente idea en forma de pregunta: ¿la construcción de un sistema numérico en base seis[1] podría mejorar tal compresión? A partir de este cuestionamiento surge la hipótesis principal que rige esta investigación:

> El estudio de un sistema numérico con base distinta de diez aumentará la comprensión del sistema numérico decimal. Específicamente, al utilizar notaciones, símbolos, denominaciones, conceptos y reglas conocidos o nuevos para establecer un nuevo registro de representación de los números, emergen las relaciones y los orígenes del sistema decimal.

El objetivo general de esta investigación es estudiar el efecto que la construcción de un sistema numérico en base seis tiene sobre la comprensión y operacionalización del consolidado sistema en base diez, en estudiantes de tercer año de licenciatura de la Universidad Paris Cité. Para ello, se desarrollan y analizan los dos sistemas, en base seis y diez, tomando en cuenta los signos, las técnicas y los conocimientos. Es decir, se interpretan los dos sistemas como dos espacios de trabajo matemático (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022).

En la siguiente sección presentamos el marco teórico de los espacios de trabajo matemático que permite, en la sección 3, precisar la noción de comprensión y el objetivo de la investigación. En la parte 4, sobre la metodología, se detalla la ingeniería didáctica que fue diseñada, enfoncándose en la primera sesión de la implementación que se estudia en este artículo. Las secciones 5 y 6 están dedicadas al análisis, *a priori* y *a posteriori*, donde se caracteriza el trabajo de los tres grupos de estudiantes. Antes de la conclusión, la sección 7 expone una discusión en torno a la noción de paradigma en el marco del dominio numérico, enfatizando elementos clave.

2. Marco teórico

En esta sección se expone un breve resumen de los elementos teóricos de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) que fundamentan el análisis de los datos. No se trata de una presentación detallada de la teoría; para entrar en su estudio profundo, véase Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard (2022).

1 La elección de la base seis se fundamenta en varias razones, entre las que destacan dos: 1) una base superior a diez supone una gran dificultad cognitiva para este público no científico; 2) seis es el único número inferior a diez que tiene dos divisores propios primos, como el diez, por lo que las dos bases tienen las mismas propiedades aritméticas.

2.1 Marco general del ETM

La teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se interesa por el estudio del *trabajo matemático* (TM), ya sea el esperado por una institución (TM de referencia) o el realizado por un individuo (TM personal). "Le travail mathématique est conçu comme un processus humain et intellectuel productif, dont l'orientation et la finalité sont définies et soutenues par les mathématiques et plus généralement par la culture mathématique" [El trabajo matemático se concibe como un proceso humano e intelectual productivo, cuya dirección y finalidad están definidas y apoyadas por las matemáticas y, más ampliamente, por la cultura matemática] (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022, p. 57).

Para una institución o un individuo, el conjunto organizado de saberes y conocimientos que pueden utilizarse para producir un TM se denomina Espacio de Trabajo Matemático (ETM), de referencia o personal. El papel del profesor consiste en construir un ETM, denominado idóneo, para que los estudiantes realicen cierto TM con el objetivo de desarrollar su ETM personal hacia el espacio de trabajo de referencia (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier, 2024).

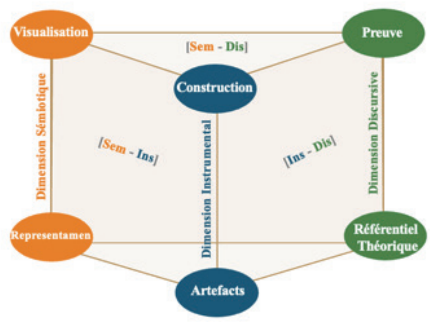
2.2 Los componentes del trabajo matemático

La teoría modeliza estos ETM mediante tres componentes de naturaleza epistemológica —representamen, artefacto y referencial teórico— y tres procesos cognitivos —visualización, construcción y prueba— que se representan mediante los planos epistemológico y cognitivo. Siguiendo a Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard (2022), examinar el desarrollo del trabajo matemático significa observar el proceso de articulación entre estos planos; su evolución puede analizarse mediante tres génesis o dimensiones: la semiótica, la instrumental y la discursiva.

- La génesis semiótica confiere a los signos su estatuto de objetos matemáticos operativos.
- La génesis instrumental operacionaliza los objetos materiales que tienen intencionalmente un uso determinado.
- La génesis discursiva da sentido a definiciones, teoremas y propiedades en el marco de un discurso deductivo y lógico.

El siguiente diagrama proporciona una representación visual de esta organización, ofreciendo una visión global que ayuda a reflexionar en el marco de esta teoría.

Figura 1. Representación de modelo ETM



Fuente: elaboración propia.

2.3 La noción de paradigma

La teoría introduce también la noción de paradigma que, siguiendo a Kuhn (1971), es un conjunto de técnicas y valores que comparte un grupo en un contexto científico. La teoría de ETM adapta esta noción a las matemáticas en un contexto escolar. En particular, para cada dominio matemático, un paradigma define la forma en que se plantean las tareas que hay que realizar y los problemas que hay que resolver, mediante la realización de una determinada tarea matemática que luego puede ser evaluada. Contrariamente a Kuhn (1971), los paradigmas en la teoría de ETM pueden coexistir y su articulación es a menudo importante para la calidad del trabajo realizado. Además, los paradigmas no son necesariamente explícitos; constituyen una herramienta para que el investigador caracterice el trabajo matemático.

2.4 La comprensión en el marco de la teoría de ETM

Con estos elementos de la teoría ETM, se puede abordar la cuestión de la comprensión, central en la pregunta de esta investigación. López y Vivier (2022) interpretan la expresión "making sense" en términos de conexiones entre los elementos de la ETM y más concretamente identificando el necesario enriquecimiento del trabajo rutinario [sem-ins] con la dimensión discursiva durante una tarea en la que las rutinas son ineficaces. Además, estos autores destacan la importancia de las articulaciones entre paradigmas.

Cabrera, Montoya, Vandebrouck y Vivier (2024) van más allá al proponer la idea de trabajo conceptualizado. Se trata de un trabajo completo y coherente acompañado de un discurso verbalizado que atestigua la conexión entre los conocimientos.

3. Objetivos e hipótesis de investigación

A partir de la presentación teórica precedente se reformula y especifica, en el marco de la teoría de los ETM, la hipótesis de investigación planteada en la primera sección.

1. Los ETM personales de los futuros profesores de primaria son suficientemente eficaces para resolver tareas en base diez, pero su trabajo es esencialmente semiótico-instrumental y el aspecto discursivo se ha desarrollado poco. En consecuencia, estos profesores no identifican la necesidad de entender mejor el funcionamiento de la base diez, con una génesis discursiva, con el objetivo de enseñar el sistema decimal. Incluso podría decirse que, para estos sujetos de estudio, un número se confunde en gran medida con su forma numérica cifrada en base diez.
2. El trabajo en una base diferente a diez posibilita la eclosión de nuevos ETM con el desarrollo necesario de las tres dimensiones, dando lugar a un trabajo completo y coherente.
3. Si este trabajo genera conexiones entre diferentes tipos de conocimiento, o articulaciones entre paradigmas, proporciona una comprensión del ETM para la nueva base.
4. Esta comprensión del ETM de la nueva base conduce a una mejor comprensión del ETM de la base diez, por lo que la nueva base debe ser suficientemente similar y diferente al mismo tiempo.

En este artículo se discuten y validan las hipótesis 2 y 3. La hipótesis 1 sigue siendo una hipótesis de trabajo razonable a la luz de experiencias precedentes. La hipótesis 4, la central, es más delicada a validar y requiere una metodología específica: la investigación continua. El análisis de los trabajos matemáticos permitirá validar la hipótesis 2 y, si se identifica un trabajo matemático conceptualizado, se podrá validar la hipótesis 3.

4. Metodología

Este artículo se inscribe en una investigación cualitativa, mediante un estudio de caso presenta el análisis de una Ingeniería Didáctica (ID) implementada durante el segundo semestre del 2024, en el marco de la formación inicial de maestros en Francia.

4.1 Una Ingeniería Didáctica

La ID es una metodología de investigación cuyo objetivo es establecer condiciones experimentales para responder a una pregunta de investigación. Requiere el desarrollo de una situación didáctica en la que la puesta en práctica experimental permite recoger datos que, comparados con un análisis *a priori*, proporcionan una respuesta al problema didáctico planteado. Frecuentemente, esta respuesta es parcial, lo que data a la ID de un carácter cíclico: los análisis *a posteriori* conducen a cambios en la situación didáctica, que debe volver a ponerse a prueba experimentalmente.

Artigue (1988, pp. 287-298) distingue cuatro fases en una ID:

1. Análisis preliminares.
2. Diseño y análisis *a priori*.
3. Experimentación.
4. Análisis *a posteriori* y validación.

Desde 2013, se han llevado a cabo varios ciclos de esta ID, basados en los análisis previos de los estudios de doctorado de Chambris (2008) y Tempier (2013) para la base diez y de Nikolantonakis y Vivier (2013, 2016) para bases distintas de diez. Por ejemplo, la segunda experimentación, en 2014, se centró en la base seis, como resultado de la retroalimentación inicial tras la experimentación de 2013, que fue en ese momento en base siete. Ahora, esta situación didáctica en conjunto es robusta porque, desde 2019, se ha mantenido relativamente estable con resultados similares y coherentes. Así, se tiene una secuencia de ocho sesiones que forman parte de un ETM idóneo, producto de la evolución y adaptación de ETM idóneos estudiados en investigaciones anteriores (Peteers y Vivier, 2022, 2023):

Tabla 1. Descripción de las sesiones que conforman el ETM idóneo

Sesión	Contenido
Sesión 1	Numeración escrita y oral en el sistema de numeración en base seis, codificación, carácter ordinal y cardinal, unidades relativas, primeras sumas.
Sesión 2 y 3	Suma y resta (tablas de sumar), multiplicación y división (tablas de multiplicar), técnicas operatorias (del mismo tipo que las de base diez utilizadas en Francia).
Sesión 4	Medida de longitudes, perímetro, lados de polígonos, sistema secimétrico, subunidades, nuevos números (racionales, raíces cuadradas) y nuevas formas de escritura (coma, fracción).
Sesión 5, 6 y 7	Medida de áreas, regla graduada, el círculo, π (conversión autorizada de 3,14 a base diez) y cálculos automatizados.
Sesión 8	Síntesis final.

Fuente: elaboración propia.

En cada tarea de la secuencia se establecieron variables didácticas específicas en función de los objetivos y resultados de las experimentaciones anteriores. Sin embargo, hay dos variables didácticas globales que pilotean este ETM idóneo: el uso de símbolos arábigos para representar los números y la restricción de cualquier referencia explícita a la base diez y, en particular, el vocabulario y los instrumentos físicos (calculadora, regla graduada, software, etc.) vinculados con el sistema decimal. Claramente, los estudiantes son libres de reflexionar usando sus conocimientos previos en base diez, propios de sus ETM personales en el sistema decimal, pero esta debe ser una reflexión interna del individuo.

4.2 Contexto de investigación

En este artículo se presenta el estudio de la Sesión 1 que se llevó a cabo durante el segundo semestre del año lectivo 2023-2024, en la Universidad Paris Cité, con un grupo de 11 futuros profesores de primaria de tercer año de licenciatura. En particular, esta primera sesión está constituida por seis partes:

a. Introduce el sucesor de un número en el sistema de numeración en base seis, haciendo énfasis en el carácter ordinal de los números.
b. Introduce la cardinalidad en este nuevo sistema de numeración.
c. Establece el valor posicional y las unidades relativas.
d. Introduce la adición de dos números representados en base seis.
e. Mecaniza las conversiones entre unidades de numeración.
f. Institucionaliza lo estudiado durante esta sesión.

El momento de clase se desarrolló en tres momentos, primero un trabajo individual sobre la tarea A1, seguido de una discusión de las producciones en subgrupos de 3 o 4 estudiantes. Se constituyeron tres subgrupos de trabajo (ESJL, MASC y VAL) que continuaron el trabajo hasta la parte F. Al final, se desarrolló una puesta en común del trabajo de los tres grupos guiada por el formador.

4.3 Recolección y análisis de los datos

Para describir la circulación del trabajo matemático de esta selección de estudiantes, se recolectaron datos de distinta naturaleza. Se grabó el audio y video de la Sesión 1 mediante una cámara fija ubicada en uno de los laterales del salón de clase, se recolectaron todas las producciones escritas de los estudiantes, así como las valoraciones de tres observadores activos (los tres investigadores); uno de los investigadores es también el formador.

El análisis de estos datos se desarrolló en tres niveles, aplicando algunas herramientas que proporciona la teoría de ETM. En un primer nivel, se exploraron las dimensiones semiótica, instrumental y discursiva mediante una tabla en la que se identificaron, para cada grupo de estudiantes (MASC, ESJL y VAL), los elementos de cada dimensión a partir de las producciones escritas y notas de los observadores.

La triangulación de estos elementos se desarrolló en un segundo nivel de análisis, que se complementó con los datos audiovisuales recolectados, obteniendo la circulación de trabajo matemático en los diversos planos verticales. Con ello, se obtuvo una síntesis del trabajo de cada grupo. El objetivo de tal síntesis es identificar el tipo de trabajo realizado por cada grupo y, en particular, las fases en las que se puede identificar el trabajo conceptualizado.

Este trabajo de interpretación se enriquece en un tercer nivel de análisis, con la identificación de elementos que podrían ser parte del paradigma (sujetos a transformación o no) después del trabajo en este ETM idóneo: significados en torno al símbolo, número, cifra, unidad, exploración del valor posicional y representación de números. Partiendo de la hipótesis —*un número es igual a su forma en base diez*—, es un elemento clave de un paradigma ampliamente compartido por los futuros profesores de primaria.

5. Análisis *a priori* de la Sesión 1

En la parte A se pide primero que completen la secuencia de números, de uno en uno, en una tabla que muestra los números del 1 al 42 en base seis, y después que expliquen cómo encontrar la escritura numérica del sucesor de un número en este sistema. Se espera que los estudiantes completen la tabla utilizando sus conocimientos de la base diez. Es posible que aparezcan las secuencias 43-44-45-46, pero las experiencias anteriores demuestran que no es muy frecuente que los dígitos 6, 7, 8 y 9 de base diez aparezcan en el dígito de la unidad, al menos en los primeros números.

Por otro lado, se espera ver 45-50-51…55-60…65-70, etc. (casi sistemático), lo que evita la introducción de un tercer dígito en el número, demostrando una comprensión del sistema ordinal en base seis. En ese caso, se prevé una retroalimentación, que puede ser una puesta en común de los resultados, para mostrar la introducción de signos externos al sistema y un recordatorio de las restricciones en torno a la base diez.

También se esperan, al inicio, explicaciones del tipo "+1" para obtener el sucesor, excepto cuando el dígito de la derecha es 5, en cuyo caso se procede a "+5", lo que demuestra una vez más la preponderancia del ETM en base diez. Tras la retroalimentación, se anticipa una buena comprensión del algoritmo que lleva de un número a su sucesor trabajando en el plano [sem-ins].

La parte B explora el aspecto cardinal invitando a los estudiantes al conteo de varias colecciones de frijoles, utilizando cartones de huevos de seis, un artefacto para visualizar los paquetes de seis frijoles, en un cartón de huevos lleno hay seis paquetes de seis, es decir, 100. Otro procedimiento podría ser contar los frijoles de uno en uno: aunque no haya palabras en este sistema, es posible utilizar la tabla construida en A como artefacto (colocar los frijoles sobre cada casilla o contar al mismo tiempo la colección y sobre la tabla). También se dan colecciones dibujadas no organizadas para automatizar la agrupación de seis en seis.

Posteriormente, se plantea una pregunta para saber cómo contar una colección utilizando este sistema de escritura de números. En este punto, se espera un trabajo de reflexión más profundo, sacando a la luz los dos principios fundamentales que hacen funcionar el sistema propuesto en A: el valor de las cifras en función de su posición en el número y la agrupación, en el plano [sem-ins]. No obstante, la génesis discursiva debe aparecer para poner en marcha el conteo agrupando por seis. De esta manera, es previsible un trabajo completo y, en función de la calidad de la explicación de los estudiantes, un trabajo conceptualizado, sobre todo si los estudiantes intentan establecer la relación con el algoritmo para la formación de números de la parte A.

Las partes C, D y E introducen las unidades de numeración y un nuevo registro para representar números, así como algunas sumas y conversiones entre unidades. Es deseable que en estas partes se formalicen, expliquen y automaticen los dos principios fundamentales, mediante un trabajo conceptualizado (quizás no para todas las tareas, en particular con una explicación de los restos en las sumas). La parte F tiene por objetivo sistematizar y sintetizar todo el trabajo realizado en vía de un trabajo conceptualizado, en especial destacando la necesidad de la numeración oral.

6. Análisis del trabajo matemático

En esta sección se presentan los principales resultados producto del análisis de los datos recolectados en cuatro secciones, siguiendo la metodología.

6.1 Sobre el trabajo individual

Como se esperaba, al completar la tabla (A1) se observa el uso de la base diez con cifras que no están presentes en la tabla. También se observan palabras que emplean la base diez, como "cuarenta y tres", que estaban restringidas. Este trabajo se realizó en el plano [sem-ins], con una fluctuación entre los $\text{ETM}_{\text{decimal}}$ conocidos y los $\text{ETM}_{\text{secimal}}$.

Figura 2. Extracto de la producción de un estudiante

A1- Continuer la suite des nombres, de un en un, de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20
21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40
41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55	60
61	62	63	64	65	70	71	72	73	74	75	80
81	82	83	84	85	90	91	92	93	44	95	100
101	102	103	104	105	110	111	112	113	114	115	120
121	122	123	124	125	130	131	132	133	134	135	140
141	142	143	144	145	150	151	152	153	154	155	160
161	162	163	164	165	170	171	172	173	174	175	180
181	182	183	184	185	190	191	192	193	194	195	200
											etc.

Fuente: datos propios.

Durante esta aplicación, no hubo necesidad de hacer una puesta en común de los resultados, ya que la retroalimentación interna en cada grupo produjo la tabla correcta, como puede observarse en la siguiente figura.

Figura 3. Extracto de la producción de un grupo de estudiantes

A) La suite des écritures chiffrées

A1- Continuer la suite des nombres, de un en un, de ce tableau (lecture de gauche à droite et de haut en bas).

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20
21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40
41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55	100
101	102	103	104	105	110	111	112	113	114	115	120
121	122	123	123	124	125	130	131	132	133	134	135
140	141	142	143	144	145	150	151	152	153	154	155
200											
											etc.

Fuente: datos propios.

La hipótesis de que "un número se confunde con su escritura en base diez" se ve apoyada en particular por las respuestas sistemáticas a la tarea A1 (ver figura 2), que muestra la preponderancia de la base diez. Con la base seis, la situación didáctica intenta modificar la relación con este aspecto del paradigma, lo que va acompañado de una reflexión sobre la noción de número, que se desarrolla en la Sección 7.

6.2 Descripción del trabajo matemático del grupo MASC

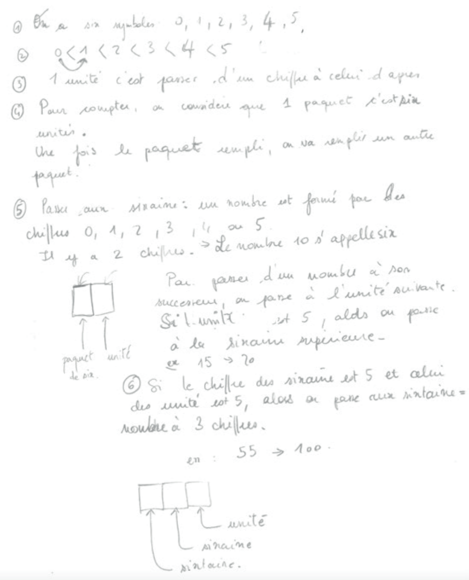
En el ETM idóneo propuesto, la primera parte tenía la intención de establecer el carácter ordinal y describir el sucesor de un número bajo este nuevo sistema. Sin embargo, el grupo MASC desarrolló un sistema de numeración funcional desde este punto, lo cual le tomó un tiempo considerable (alrededor de 40 minutos) en comparación con VAL y ESJL, quienes ocuparon la mitad del tiempo en esta parte de la secuencia. MASC inicia el trabajo discutiendo la asignación símbolo-cifra-número. Luego, los miembros del grupo operacionalizan una técnica propia del $\text{ETM}_{\text{decimal}}$, añadir 1 (+1), para obtener el sucesor de un número; así define la unidad. Para extender el conteo, una vez que se sobrepasan los seis elementos de un conjunto, MASC reagrupa en *paquetes* de seis unidades, transponiendo la noción de agrupación, propia de su $\text{ETM}_{\text{decimal}}$. De hecho, en su producción se observa una *caja de valores*, típica del trabajo que se realiza en el marco del sistema decimal:

Figura 4. Extracto de la producción del grupo MASC

Fuente: datos propios.

La activación de estos dos elementos, el conteo y la agrupación, permite el desarrollo del valor posicional en el trabajo matemático de MASC, explorando "¿por qué hacemos esto?" y "¿cómo lo hacemos?". No se trata de un simple desplazamiento de un conocimiento del $ETM_{decimal}$ personal a este $ETM_{secimal}$, sino de una trasposición justificada que estos estudiantes extienden al avanzar en la secuencia de tareas, obteniendo, entonces, una sucesión de representaciones de números mediante nuevos términos como *six*, *sixaine* y *sixtaine*, producto de la conjunción entre el tratamiento de las representaciones de números, la operacionalización de la técnica +1, el conteo, la agrupación y el valor posicional.

Figura 5. Extracto de la producción del grupo MASC en A1



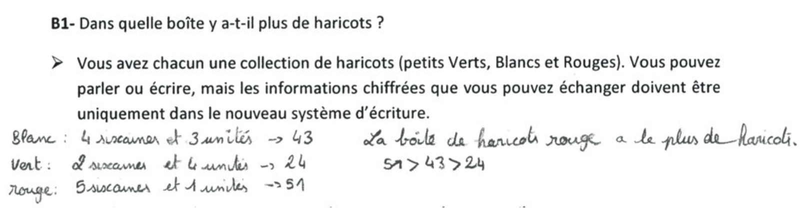
1. Tenemos seis símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5
2. 0<1<2<3<4<5
3. 1 unidad es pasar de una cifra a la siguiente.
4. Para contar, consideramos que 1 paquete son seis unidades.
5. Una vez que el paquete está completo, completamos otro paquete.
6. Pasar a la sixaine: un número está formado por las cifras 0, 1, 2, 3, 4 o 5.
7. Hay dos cifras → El número 10 se llama seis.
8. Para pasar de un número a su sucesor, pasamos a la siguiente unidad.
9. Si la unidad es 5, entonces pasamos a la sixaine siguiente.
    - Ej: 15 → 20
    - Si la cifra de las sixaine es 5 y la de las unidades es 5, entonces pasamos a la sixtaine = número de 3 cifras.
    - Ej: 55 → 100

Fuente: datos propios.

El trabajo realizado por MASC es remarcable. Está claro que estos estudiantes utilizan conocimientos de la base diez que transponen a la base seis, mediante un desarrollo interno que permite efectivamente la construcción de un ETM en base seis. Su trabajo no requiere la guía por partes como fue previsto: MASC se adelanta a la parte B, con los paquetes de seis; a las partes C, D y E, con las unidades de numeración; y a la parte F, puesto que presentan una síntesis. Adicionalmente, hay una anticipación del trabajo previsto para la Sesión 2, con la instauración de palabras para designar los números y las unidades. Únicamente la suma y las conversiones entre unidades de numeración son objeto de escasa atención por parte de este grupo. El trabajo es claramente completo y coherente, y sus explicaciones muestran los vínculos entre conceptos y conocimientos. A partir de A, MASC desarrolló un trabajo conceptualizado que responde prácticamente a las expectativas de la parte F.

Con un sistema de numeración en base seis bien construido y comprendido, la operacionalización de este sistema mediante las operaciones básicas fue una tarea simple para MASC. La segunda parte del ETM idóneo tenía por objetivo introducir la noción de agrupación, ese es un trabajo que ya había hecho este grupo de estudiantes. No obstante, este conjunto de tareas les permitió mecanizar su sistema de numeración, por ejemplo, en el conteo de los frijoles MASC establece para cada tipo de frijoles:

Figura 6. Extracto de la producción del grupo MASC en B1


B1- Dans quelle boîte y a-t-il plus de haricots ?

- Vous avez chacun une collection de haricots (petits Verts, Blancs et Rouges). Vous pouvez parler ou écrire, mais les informations chiffrées que vous pouvez échanger doivent être uniquement dans le nouveau système d'écriture.

Blanc : 4 sixaines et 3 unités → 43
Vert : 2 sixaines et 4 unités → 24
rouge : 5 sixaines et 1 unités → 51

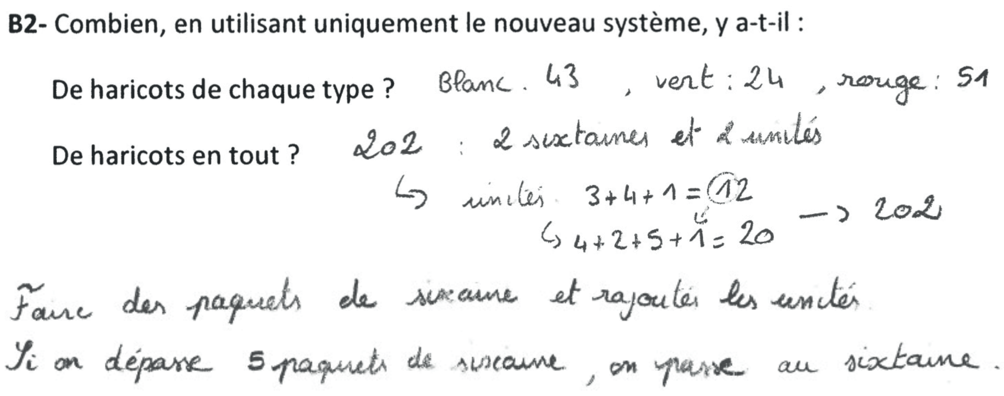
La boîte de haricots rouge a le plus de haricots.
51 > 43 > 24

Blancos: 4 sixaines y 3 unidades → 43
Verdes: 2 sixaines y 4 unidades → 24
Rojos: 5 sixaines y 1 unidades → 51

Fuente: datos propios.

Eso les permite un trabajo completamente en este nuevo sistema de representación de los números. En el siguiente extracto se observa que no hay uso de la clásica suma vertical, sino que se trata de una adición utilizando la agrupación y los términos introducidos por los estudiantes.

Figura 7. Extracto de la producción del grupo MASC en B2


B2- Combien, en utilisant uniquement le nouveau système, y a-t-il :

De haricots de chaque type ? Blanc . 43 , vert : 24 , rouge : 51

De haricots en tout ? 202 : 2 sixtaines et 2 unités

↳ unités 3+4+1 = 12 → 202

↳ 4+2+5+1 = 20

Faire des paquets de sixaine et rajoutés les unités.

Si on dépasse 5 paquets de sixaine, on passe au sixtaine.

Fuente: datos propios.

Lo desarrollado en B muestra un trabajo completo y coherente con descomposiciones de números en unidades, lo que constituye un nuevo registro con conversiones. Es difícil saber si se trata de un trabajo conceptualizado por el tipo de datos recolectados. Sin embargo, en la figura 7 correspondiente a la producción del grupo MASC, la flecha que señala en la cifra 1 del 12 como 1 unidad de *sixaines*. De esta manera, las siguientes partes del ETM idóneo fueron desarrollas con agilidad y rapidez por MASC, evidenciando la compresión del sistema, con nuevas palabras que facilitan el trabajo, y terminando con una síntesis que retoma lo realizado en A y B.

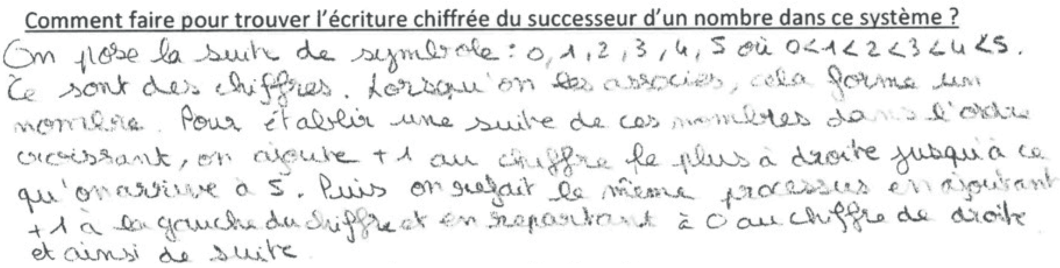
6.3 Descripción del trabajo matemático de los grupos ESJL y VAL

Como los grupos VAL y ESJL desarrollan trabajos similares, a continuación se presenta en detalle únicamente el trabajo de ESJL. Aunque es preciso señalar que VAL tuvo más dificultades para avanzar que ESJL, ambos grupos trabajaron hasta la parte D, ya que por cuestiones de tiempo era necesario continuar con la puesta en común (MASC había terminado para entonces todas las tareas de la Sesión 1).

Al determinar el sucesor de un número en este sistema, el grupo ESJL inicia por establecer los símbolos con los que trabajarán. Estos símbolos pasan a ser cifras en este contexto para, posteriormente, convertirse en un número una vez que estas son asociadas. En este caso, la técnica +1, añadir 1, también forma parte del $ETM_{decimal}$ personal y es operacionalizada por este grupo de estudiantes para describir el sucesor de un número.

Durante la primera parte de la sesión, bien que se observan pistas de la noción del valor posicional en el trabajo de ESJL, pues se trata de una idea muy rudimentaria inspirada en cómo cambian los números en la tabla dada: “añadimos +1 a la cifra más a la derecha hasta que llegamos a 5”. No hay un cuestionamiento en torno a las razones que movilizan tal acción, más allá de una mecanización que funciona para hallar al sucesor.

Figura 8. Extracto de la producción del grupo ESJL en A1


Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée du successeur d'un nombre dans ce système ?

On pose la suite de symbole : 0, 1, 2, 3, 4, 5 où 0<1<2<3<4<5. Ce sont des chiffres. Lorsqu'on les associes, cela forme un nombre. Pour établir une suite de ces nombres dans l'ordre croissant, on ajoute +1 au chiffre le plus à droite jusqu'à ce qu'on arrive à 5. Puis on refait le même processus en ajoutant +1 à la gauche du chiffre et en repartant à 0 au chiffre de droite et ainsi de suite.

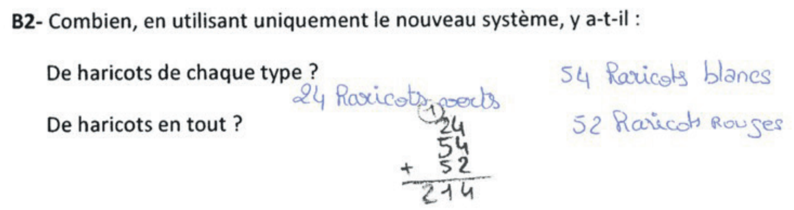
Fuente: datos propios.

Consideramos la sucesión de símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 donde 0<1<2<3<4<5

Estos son cifras. Cuando las asociamos, se forma un número. Para establecer una sucesión de estos números en orden creciente, añadimos +1 a la cifra más a la derecha hasta que llegamos a 5. Después hacemos el mismo proceso añadiendo +1 a la derecha de la cifra y reiniciando a 0 la cifra de la derecha y así sucesivamente.

El tiempo de reflexión en torno a esta primera tarea fue bastante reducido por parte de ESJL. Consiguieron desarrollar un algoritmo para obtener el sucesor de un número en base seis, sin explicarlo. Su trabajo es esencialmente [sem-ins], lo que era de esperar para esta parte. A nivel global, el trabajo de este grupo se limitará al plano [sem-ins], lo que hará que su trabajo sea más lento y poco eficaz en comparación con el de MASC. Además, sin un buen desarrollo del ETM$_{\text{secimal}}$ mediante un trabajo conceptualizado, la base diez seguirá estando muy presente. Por ejemplo, en la primera adición simple con frijoles, ESJL permanece anclado a la suma vertical clásica propia de su ETM$_{\text{decimal}}$. Nótese la diferencia con la suma MASC (véase la figura 7): el uso de la retención en el trabajo de ESJL es característico de un trabajo [sem-ins].

Figura 9. Extracto de la producción del grupo ESJL en B2



B2- Combien, en utilisant uniquement le nouveau système, y a-t-il :

De haricots de chaque type ? 24 Raricots verts 54 Raricots blancs

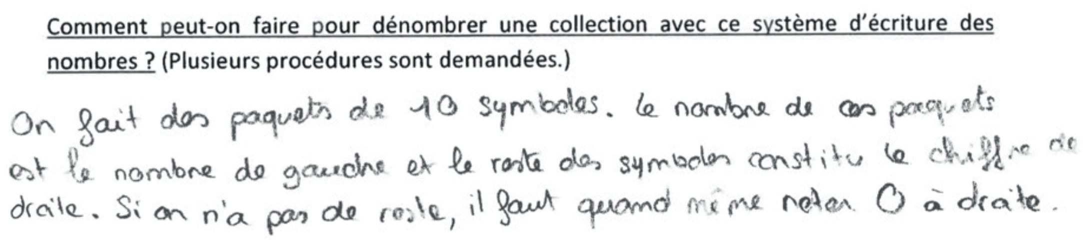
De haricots en tout ? 52 Raricots Rouges

$$\begin{array}{r} 24 \\ 54 \\ +\ 52 \\ \hline 214 \end{array}$$

Fuente: datos propios.

Además, aunque la argumentación en términos de “la cifra a la derecha” y “la cifra a la izquierda” resulta obsoleta cuando se tiene más de 2 dígitos, este grupo de estudiantes continúa apegado a esta argumentación mecánica. Por ejemplo, en su producción expresan:

Figura 10. Extracto de la producción del grupo ESJL en B3



Comment peut-on faire pour dénombrer une collection avec ce système d'écriture des nombres ? (Plusieurs procédures sont demandées.)

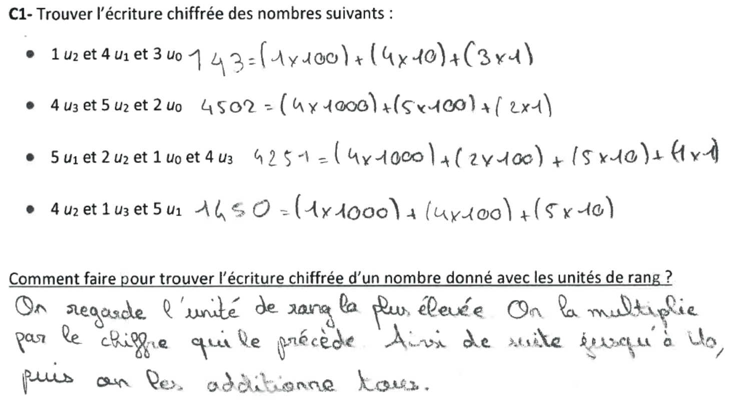
On fait des paquets de 10 symboles. Le nombre de ces paquets est le nombre de gauche et le reste des symboles constitu le chiffre de draite. Si on n'a pas de reste, il faut quand même noter 0 à draite.

Fuente: datos propios.

Hacemos paquetes de 10 símbolos. El número de estos paquetes es el número de la izquierda y el resto de símbolos constituye la cifra de la derecha. Si no tenemos resto, hay que escribir 0 a la derecha.

Observe que se trata de una argumentación anclada totalmente en lo simbólico y en la mecanización de una técnica para hallar los números correspondientes sin trazas del valor posicional: el trabajo es [sem-ins]. En las siguientes tareas, el valor posicional permanece ausente, el trabajo de este grupo consiste en la manipulación de los símbolos. En la tercera parte, de forma mecánica y mediado totalmente por el ETM$_{decimal}$ se acercan al valor posicional. Cuando se les cuestiona por la manera de encontrar la escritura cifrada de un número dado con las unidades relativas, ESJL ofrece una argumentación instrumental, alejada del lugar que ocupa cada símbolo y su respectivo significado:

Figura 11. Extracto de la producción del grupo ESJL en C1


C1- Trouver l'écriture chiffrée des nombres suivants :

- 1 u_2 et 4 u_1 et 3 u_0 143 = (1×100) + (4×10) + (3×1)
- 4 u_3 et 5 u_2 et 2 u_0 4502 = (4×1000) + (5×100) + (2×1)
- 5 u_1 et 2 u_2 et 1 u_0 et 4 u_3 4251 = (4×1000) + (2×100) + (5×10) + (1×1)
- 4 u_2 et 1 u_3 et 5 u_1 1450 = (1×1000) + (4×100) + (5×10)

Comment faire pour trouver l'écriture chiffrée d'un nombre donné avec les unités de rang ?

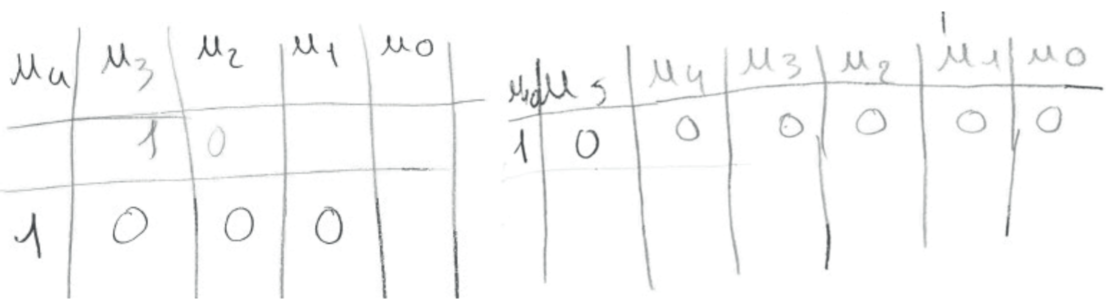
On regarde l'unité de rang la plus élevée. On la multiplie par le chiffre qui le précède. Ainsi de suite jusqu'à u_0, puis on les additionne toutes.

Fuente: datos propios.

Observamos la unidad relativa más grande. La multiplicamos por la cifra que le precede. Así sucesivamente hasta u_0, después las adicionamos todas.

El trabajo, esencialmente [sem-ins], se importa de base diez a base seis, sin ninguna génesis discursiva que pueda permitir un trabajo conceptualizado y una comprensión del EMT de base seis. Este grupo opera el nuevo sistema con sus conocimientos de base diez, como puede verse en la figura 11. Asimismo, en la parte C construyeron un artefacto para las conversiones (ver figura 12). Se trata de una herramienta eficaz que mantiene su trabajo en el plano [sem-ins].

Figura 12. Extracto de la producción del grupo ESJL en C

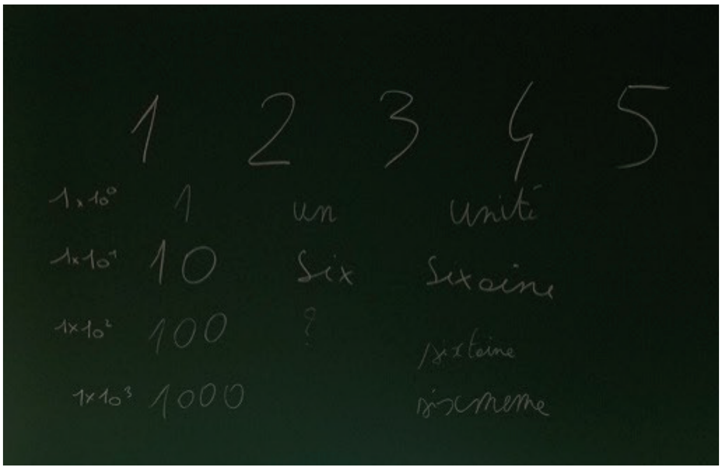


Fuente: datos propios.

6.4 Síntesis del trabajo realizado por los grupos - institucionalización

La puesta en común comienza con la presentación por parte del grupo ESJL del funcionamiento de su sistema expresado en forma de algoritmo de formación de números, en el plano [Sem-Ins]. Luego, el grupo MASC aportó rápidamente todo el trabajo discursivo y las palabras para designar los números, ausentes en los otros dos grupos. Posteriormente, se retomaron todas las ideas poniendo en perspectiva el trabajo de todos los grupos con el objetivo de la institucionalización de un sistema de representación común (ver figura 13). Esta institucionalización es, de hecho, necesaria para que la secuencia continúe.

Figura 13. Producción común en la pizarra



Fuente: datos propios.

En el caso del grupo MASC, con el trabajo conceptualizado que han desarrollado, cabe suponer que efectivamente han empezado a desarrollar no solo un E ETM$_{secimal,}$ sino también una comprensión de este ETM. El tiempo empleado en la parte A, dada la génesis discursiva, se recuperó en gran medida después, puesto que su ETM$_{secimal}$ es muy eficaz. Aunque los otros dos grupos también empezaron a desarrollar un ETM$_{secimal}$, no activaron la dimensión discursiva. Se trata de una simple traducción de las técnicas conocidas de la base diez a la base seis; es decir, en el caso de ESJL y VAL no se tiene una comprensión del ETM$_{secimal}$. De hecho, su trabajo fue laborioso y lento, a tal punto que no lograron terminar todas las tareas. Fue la discusión final, con la presentación de la dimensión discursiva por parte de MASC, que permitió anclar esta comprensión en el ETM$_{secimal}$ personal para todos los estudiantes.

7. Una discusión en torno al paradigma

Si bien un paradigma es más cercano al ETM de referencia, los estudiantes y sus ETM personales se enmarcan bajo una institución, lo cual permite detectar rasgos de los paradigmas sobre la base de su trabajo matemático. En esta sección se presentan algunos de estos rasgos detectados a partir del estudio de la circulación del trabajo matemático, expuesto en la sección anterior. No se trata de la construcción o definición de los paradigmas numéricos, la intención de esta discusión es acercarse a estos paradigmas mediante elementos claves que sobresalen del trabajo de los estudiantes.

Independientemente del tipo de circulación del trabajo matemático, los tres grupos cuestionaron el uso de los términos asociados para designar un número; se debatieron entre *número*, *cifra* y *símbolo*. MASC y ESJL consideran "0, 1, 2, 3, 4, 5" como un conjunto de símbolos, señalando: "Tenemos seis símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5" o "Consideramos la sucesión de símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5". Luego, añaden el carácter ordinal a estos signos al establecer que el 0 representa al número más pequeño y el 5 al más grande de este conjunto.

Con la intención de describir el nuevo sistema de numeración, estos símbolos adquieren una nueva denominación *cifra*, al introducir la noción de *unidad*. En las producciones de los estudiantes este pasaje es muy natural; después de definir los símbolos a utilizar, MASC y ESJL establecen, por ejemplo, "1 unidad es pasar de una *cifra* a la siguiente" o "Estos son *cifras* [haciendo referencia a los símbolos]". Los datos recolectados no permiten comprender en detalle este pasaje. Sin embargo, pareciera que los estudiantes interpretan las cifras como símbolos que tienen cierto significado únicamente en el contexto numérico, donde existe una asignación unilateral símbolo cifras.

A partir de este concepto de *cifra*, los tres grupos establecen ¿qué es un número?, aunque no fue solicitado explícitamente en el ETM idóneo. Las tres producciones conceptualizan un número como la asociación de cifras. MASC y ESJL lo hacen de manera explícita: "Un *número* está formado por las cifras 0, 1, 2, 3, 4 o 5" y "Cuando las asociamos [haciendo referencia a las cifras], se forma un *número*"; mientras que el grupo VAL lo evidencia al definir el sucesor de un número.

Entonces, existe una asociación símbolo cifras número. La primera conexión, símbolo cifras, no dista de lo que establece el ETM de referencia: una cifra es concebida como un símbolo. En la segunda conexión, cifras número, entendiendo que un número es un objeto abstracto que expresa un valor, puede representar magnitudes, cantidades, posiciones, entre otros. ¿Están comprendiendo estos estudiantes que tales cifras se utilizan en la representación de números y que no son el número en sí mismo? Es muy temprano en el análisis de datos para responder esta pregunta porque hay un trabajo en las sesiones posteriores que podría arrojar elementos de respuesta, pero que no se discute en este artículo.

Ahora bien, en el trabajo del grupo MASC se observa una articulación entre el valor posicional con los símbolos seleccionados. Comprender la escritura de un número representado por varias cifras implica una codificación de las relaciones entre las cifras de manera aislada mediante la posición que ocupa en su escritura. En el sistema de numeración secimal, cada *sixaine* equivale a seis unidades, en general, cada valor posicional equivale a seis unidades del valor inferior. A diferencia de la representación oral, en la representación escrita de un número hay la implicación directa de la adición y el producto en la representación escrita. Entonces, comprender el valor posicional de las cifras de 43 (ver figura 7), por ejemplo, significa identificar que:

- 4 representa 40 sixaines
- Hay 4 grupos de 10 (seis) unidades simples, esto es, 4×10=40
- 40+3=43

Aunque comprender el valor posicional no significa tener una compresión profunda del concepto de número, el trabajo conceptualizado en torno al valor posicional por parte del grupo MASC es de suma importancia. Esto, porque esta conexión entre el cuestionamiento → cifra → número y el desarrollo del valor posicional converge en el establecimiento de otro sistema de representación funcional (en base seis) para los números. Entonces, a partir del trabajo en la sesión 1, MASC cuenta con dos sistemas de representación para los números, en base diez y en base seis.

Además, la hipótesis 1 plantea la confusión del número con su representación cifrada, pero el rango de esta confusión se reduce considerablemente, al menos para el grupo MASC, al existir al menos dos sistemas de representación para el número. Después de la institucionalización, a partir del trabajo en base seis se da una evolución del paradigma común, tomando conciencia del papel no absoluto de la base diez. Sin embargo, pareciera que este ETM idóneo de la Sesión 1 no tiene incidencia en la asociación número cifra; es un cuestionamiento que permanece abierto para próximas investigaciones.

8. Conclusiones

En esta primera sesión analizada en este artículo es posible observar la importancia del trabajo conceptualizado que, de hecho, es el criterio empleado para acreditar la comprensión. Un trabajo que se limite al plano [sem-ins], mediante la traducción de $\text{ETM}_{\text{decimal}}$ a $\text{ETM}_{\text{secimal}}$, no permite tal comprensión y, en última instancia, bloquea el trabajo, lo hace más laborioso y menos eficaz, tal como se observa en el trabajo desarrollado por ESJL y VAL. En contraste, el grupo MASC desarrolla desde el inicio de la sesión un trabajo conceptualizado que les permite navegar de manera fluida a través de las tareas propuestas en este ETM idóneo. En general, es en la puesta en común final cuando se desarrolla o profundiza la comprensión, mediante preguntas dirigidas por parte de los formadores. Pero, en esta implementación, se aprovechó el trabajo conceptual del grupo MASC para el momento de institucionalización, cuyo objetivo es disponer de un $ETM_{secimal}$ funcional, alternativo al $ETM_{decimal}$.

Asimismo, en el estudio de esta sesión se observa el preámbulo de un cambio en ciertos elementos clave del paradigma numérico. Tras esta primera sesión, los estudiantes disponen de una representación alternativa para los números. Aunque podrían conservar la idea de que un número está formado por cifras, la presencia de otro sistema de representación puede contribuir al cuestionamiento sobre la confusión de un número con su representación en base diez. De ahí la importancia del desarrollo de un $ETM_{secimal}$ tan funcional como el $ETM_{decimal}$. En ese contexto, se dispondrá no solo de una representación alternativa a la base diez, sino de todo un ETM alternativo: no importa si un número se representa en base seis o en base diez, porque los mismos problemas pueden resolverse en cualquiera de los dos ETM. Sin embargo, la cuestión que queda por abordar es cómo este trabajo puede beneficiar a la enseñanza del sistema de numeración clásico en base diez, porque ese es el objetivo último de la formación.

9. Referencias bibliográficas

Anselmo, B. y Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération-une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N*, *91*, 71-91.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Cabrera, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F. y Vivier, L. (2025). Conceptualized mathematical work. *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique*, A paraître.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de didactique des disciplines, spécialité didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *30*, 317-366.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas* (Agustín Contin, trad.). Fondo de Cultura Económica.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

López, S. S. y Vivier, L. (2023). Local visualization of functions in work on optimization. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *42*(4), 305-324. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac022

Ministerio de la Educación Nacional y de la Juventud (23 de mayo del 2024). *Programmes et horaires à l'école élémentaire*. https://www.education.gouv.fr/programmes-et-horaires-l-ecole-elementaire-9011.

Nikolantonakis, K. y Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. MENON, issue 2a, 99-114.

Nikolantonakis, K. y Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, *30*(54), 23-44. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a02

Peteers, F. y Vivier, L. (2022). Les mathématiques pour la formation des enseignants du premier degré revisitées par le système sécimal. *Grand N*, *109*, 33-54.

Peteers, F. y Vivier, L. (2023). Petit détour par le système sécimal. En Dans C., Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 431-442). IREM de Strasbourg, 27 juin-2 juillet 2022, Strasbourg (France).

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, *86*, 59-90.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de didactique des disciplines, spécialité didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

Tempier, F. (2018). Des pistes pour enseigner les grands nombres au cycle 3. *Petit x*, *108*, 41-66.