

Recibido: 14-05-24

| Aceptado: 09-08-24

| Publicado: 20-12-2024

RELACIONES TEÓRICAS EN EL ETM IDÓNEO EFECTIVO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

THEORETICAL RELATIONSHIPS IN THE EFFECTIVE SUITABLE MWS OF SECONDARY
EDUCATION TEACHERS

CAROLINA HENRÍQUEZ-RIVAS

Universidad Católica del Maule

Talca, Chile

chenriquezr@ucm.cl

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4869-828X>

ANDREA STEPHANIE VERGARA GÓMEZ

Universidad Católica del Maule

Talca, Chile

avergarag@ucm.cl

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6388-8412>

ESTUDIOS

Resumen

La investigación reciente destaca la necesidad de conectar el trabajo matemático del profesorado con modelos teóricos existentes. De aquí que el presente estudio pone atención en relaciones teóricas del trabajo matemático en el aula de profesores de educación secundaria, con énfasis en la enseñanza de la geometría, sustentado en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). La metodología se basa en un enfoque mixto secuencial. En una primera fase, de carácter cuantitativo, se realiza un análisis de variables categóricas, considerando una muestra de 63 profesores, lo cual permite analizar las relaciones entre componentes teóricas del ETM y el diseño de tareas. Luego, en una fase cualitativa, se entrevista a un profesor, como caso representativo, para profundizar en dichas relaciones. Los resultados permiten mostrar interpretaciones sobre las relaciones entre componentes teóricas en el ETM

de los profesores participantes con base en la evidencia empírica. Finalmente, las relaciones teóricas pueden ser consideradas en investigaciones futuras para la valoración de los ETM del profesorado, el diseño de tareas, o bien para la investigación centrada en la enseñanza.

Palabras clave: Espacios de Trabajo Matemático, profesor, ETM idóneo efectivo, relaciones teóricas.

Abstract: Recent research highlights the need to connect teachers' mathematical work with existing theoretical models. Thus, the present study pays attention to theoretical relationships of mathematical work in the classroom of secondary education teachers, with emphasis on the teaching of geometry, supported by the theory of Mathematical Working Spaces (MWS). The methodology is based on a sequential mixed approach. In a first phase, of a quantitative nature, an analysis of categorical variables is carried out, considering a sample of 63 teachers, which allows analyzing the relationships between theoretical components of the MWS and the design of tasks. Then, in a qualitative phase, a teacher is interviewed, as a representative case, to delve into these relationships. The results allow us to show interpretations about the relationships between theoretical components in the MWS of the participating teachers based on empirical evidence. Finally, theoretical relationships can be considered in future research for the assessment of teachers' MWS, the design of tasks, or for research focused on teaching.

Keywords: Mathematical Working Spaces, teacher, effective suitable MWS, theoretical relationships.

1. Introducción

El campo de investigación de la Educación Matemática ha experimentado el desarrollo de diversas posiciones teóricas y metodológicas, líneas y comunidades de investigación que contribuyen a abordar y explicar problemáticas desde diferentes puntos de vista (e. g., Bikner-Ahsbahr *et al.*, 2015; Lerman, 2020). Asimismo, la investigación reciente destaca la necesidad de estudiar al profesorado con atención en la planificación e implementación de la enseñanza (Cevikbas *et al.*, 2024). Especialmente en el dominio de geometría, algunos estudios analizan el trabajo geométrico de profesores sustentado en diversos modelos teóricos existentes (Clemente y Linares, 2015; Zakaryan y Sosa, 2021; Henríquez-Rivas *et al.*, 2021b). De aquí que el presente

reporte pone atención en relaciones teóricas del trabajo matemático de profesores de educación secundaria, con especial atención en la enseñanza de la geometría.

En estudios, como el de Climent *et al.* (2021), los autores analizan la clase de un profesor en Chile, en la que se introduce el teorema de Thales, para lo cual se utiliza el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), cuestionando la enseñanza de dicho contenido y las interacciones del profesor en el aula. En la misma línea, la investigación de Zakaryan y Sosa (2021) plantea la falta de estudios en geometría a partir de datos empíricos.

Otras investigaciones enfocadas en la enseñanza de la geometría dejan en evidencia la necesidad de instrucción y capacitación docente usando enfoques teóricos pertinentes (Sunzuma y Maharaj, 2020), así como la recomendación de realizar investigaciones de este tipo a mayor escala (Tachie, 2020). Por su parte, Guzmán Retamal *et al.* (2020) exploran en la gestión de profesores que enseñan teoremas geométricos en Chile, basados en la Teoría de Situaciones Didácticas, y evidencian la necesidad de hacer estudios de la práctica matemática en el aula de los docentes. Por ello, se plantea que un estudio que considere aspectos teóricos sobre la enseñanza del profesorado basado en evidencia empírica puede ser un aporte al campo disciplinar.

Algunas investigaciones ponen atención en procesos cognitivos específicos en el dominio geométrico (e. g., Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). La investigación de Ayvaz *et al.* (2017) analiza las imágenes conceptuales de futuros profesores de Turquía, en relación con conceptos y propiedades geométricas elementales y revelan dificultades relacionadas con el proceso de prueba. Por su parte, Creager (2022) explora un aspecto del razonamiento, las refutaciones geométricas de futuros profesores de Estados Unidos, y plantea algunas sugerencias para preparar mejor a los profesores en formación en este ámbito. En Salazar (2018) se exploran tres actividades cognitivas asociadas con los registros de representación semiótica en geometría dinámica, dando cuenta de la relevancia de realizar aportaciones teóricas en este sentido.

Así, el profesorado desarrolla sus propias estrategias para la enseñanza de la geometría, dejando en evidencia la necesidad de estudiar su gestión en el aula. Asimismo, la formación de profesores debe considerar experiencias de enseñanza y evidencia empírica que permita llevar el discurso teórico a la práctica. Y si bien se dispone de un amplio campo de investigación sobre aspectos teóricos y empíricos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, especialmente en

secundaria (Herbst *et al.*, 2018), un estudio que aporte en la definición de relaciones sobre el trabajo del profesorado, a partir de evidencia empírica sobre la enseñanza de la geometría en temáticas de educación secundaria, se plantea como un aporte a la disciplina. Por ello, el objetivo de investigación es *analizar relaciones teóricas en el trabajo matemático de profesores, en la enseñanza de temáticas de geometría de educación secundaria*. El sustento teórico del estudio contempla una teoría particularmente pertinente para el estudio del trabajo matemático del profesorado, conocida como Espacios de Trabajo Matemático.

2. Marco teórico

Una teoría que ha reportado avances en los últimos años y es usada para analizar el trabajo matemático del profesor desde diversos puntos de vista (en la planificación de la enseñanza, en el aula, en la evaluación de aprendizajes, en el diseño de tareas, en la formación) es conocida como los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) (Kuzniak *et al.*, 2022). Los ETM se reconocen como una teoría didáctica que relaciona los contenidos matemáticos, combinando estrechamente aspectos epistemológicos de las matemáticas y procesos cognitivos de los sujetos (Radford, 2017). La riqueza de este corpus teórico favorece la profundización en el estudio del trabajo matemático que realizan tanto profesores como estudiantes (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022; Menares y Vivier, 2022).

Esta teoría se ocupa de la descripción, comprensión y formación del trabajo matemático de los actores educativos, para poder actuar sobre estos fenómenos (Kuzniak, 2022). De este modo, el objetivo de la teoría de los ETM es el estudio didáctico del trabajo matemático en el que participan estudiantes y profesores, a fin de contribuir a la comprensión del trabajo de personas que resuelven tareas, además, permite caracterizar los caminos que emergen en su resolución (Kuzniak *et al.*, 2016). Asimismo, algunos trabajos muestran los ETM como una herramienta analítica y metodológica para la investigación asociada al estudio de tareas matemáticas (e. g., Kuzniak y Nechache, 2021; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021; Nechache y Gómez-Chacón, 2022).

La teoría de los ETM considera, por una parte, los principios epistemológicos de los objetos que se estudian dentro de un dominio matemático (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016) y, por otra, el componente humano (o social), lo que implica examinar una dimensión cognitiva, relacionada con la dimensión epistemológica (Kuzniak, 2022). Estas dos dimensiones, llamadas planos epistemológico

y cognitivo, pretenden captar los contenidos matemáticos del dominio estudiado y la actividad cognitiva del individuo cuando adquiere, desarrolla o utiliza esos contenidos matemáticos (Kuzniak, 2011).

El plano epistemológico tiene tres componentes: el *representamen*, asociado con un conjunto de símbolos concretos y tangibles en función de las interpretaciones y relaciones construidas por el individuo; los *artefactos*, como herramientas de construcción, un software o un sistema simbólico, empleado como un instrumento para la acción; un *referencial teórico* basado en definiciones, propiedades y teoremas.

El plano cognitivo se organiza en torno a tres procesos: la *visualización*, relacionada con el desciframiento e interpretación de signos; la *construcción*, basada en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas; la *prueba*, entendida como todo razonamiento discursivo que permite formular argumentaciones, demostraciones, definiciones, hipótesis y conjeturas, y enunciar contraejemplos, con apoyo del referencial teórico (Kuzniak, 2022; Kuzniak et al., 2016).

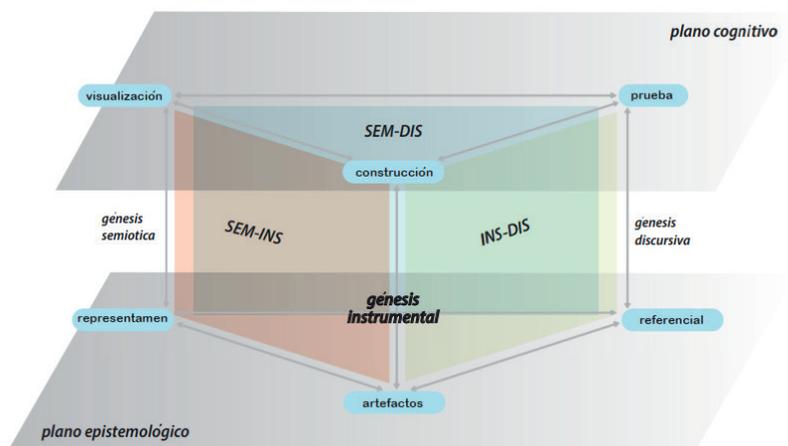
La articulación entre dichos planos se realiza mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, que permiten coordinar y explicitar la naturaleza del trabajo matemático en diversos contextos educativos e institucionales (Kuzniak, 2011). La génesis semiótica representa la relación entre el objeto matemático y el proceso cognitivo de visualización para dotarlo de significado. En la génesis instrumental se hacen operativos los artefactos, a través de la construcción realizada por un individuo. La génesis discursiva relaciona el referencial y los procesos de prueba.

En la investigación de Coutat y Richard (2011) se reconoce la idea de planos verticales, entendidos como las interacciones entre dos génesis y los componentes implicados (Kuzniak y Richard, 2014). En estas interacciones se identifican tres planos verticales diferentes (Kuzniak et al., 2016):

- Plano vertical [Sem-Ins], asociado con el uso de los artefactos en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o en la exploración de representaciones semióticas.
- Plano vertical [Ins-Dis], cuando el proceso de prueba está basado en una experimentación con empleo de un artefacto, o bien en la validación de una construcción.
- Plano vertical [Sem-Dis], relaciona la coordinación del proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento de validación.

La relación entre los planos, componentes, génesis y planos verticales se ilustra en el siguiente diagrama (figura 1).

Figura 1. Diagrama del ETM



Fuente: adaptado de Kuzniak et al., 2016, p. 863.

De lo anterior, la investigación en ETM se basa en estudiar y comprender la dinámica del trabajo matemático mediante el papel de cada una de estas génesis y sus interacciones cuando el individuo resuelve tareas específicas (Kuzniak, 2018). Por ello, las tareas ocupan un lugar importante en la teoría de los ETM, pues son entendidas como el medio para la resolución de problemas (Kuzniak, 2022). Si bien las tareas, su diseño e implementación no son una componente explícita del modelo, se entiende como las que activan el trabajo matemático (Kuzniak, 2011) y, por ende, se trata de un asunto de relevancia en la investigación bajo esta perspectiva (e. g., Kuzniak y Masselin, 2024).

Finalmente, se distinguen tres tipos de ETM que dependen del propósito de la investigación, de sus usuarios, de su posición en una institución escolar y de su rol en la implementación del currículo escolar (Gómez-Chacón et al., 2016): *ETM de referencia*, relacionado con personas o instituciones responsables de la institución escolar de acuerdo con criterios matemáticos (Montoya-Delgadillo y Reyes-Avenidaño, 2022); *ETM personal*, vinculado con la realidad del trabajo de los estudiantes cuando se apropian y manejan la resolución de problemas (Menares-Espinoza y Vivier, 2022); *ETM idóneo*, entendido como el modo en que un contenido matemático desarrollado por un profesor o investigador se diseña, adapta y se propone para la enseñanza en un lugar y contexto determinados (Henríquez Rivas et al., 2021b).

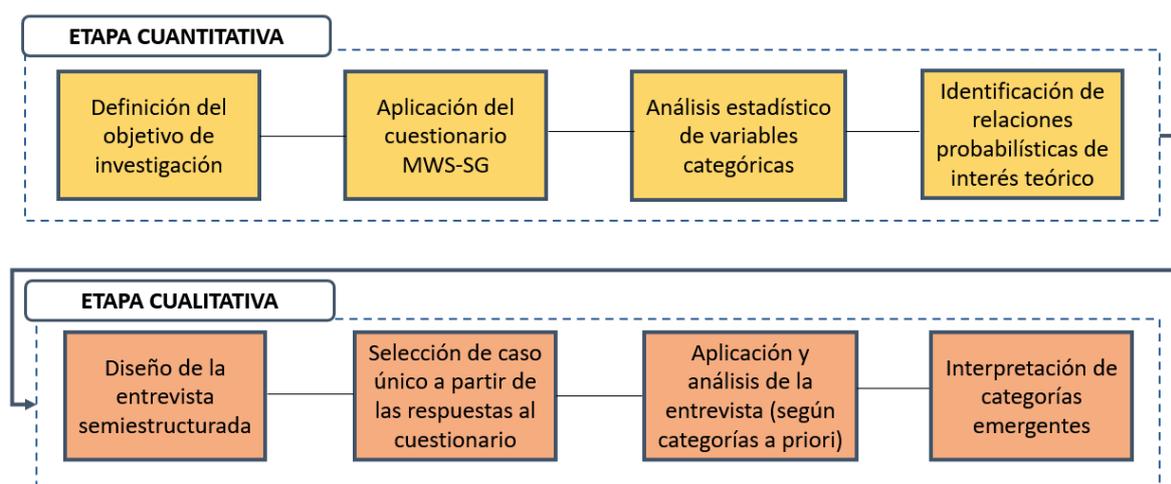
En particular, el presente estudio pone atención en el ETM idóneo de profesores cuando enseñan un tema matemático en el aula, entendido como *ETM idóneo efectivo* (o actual) del profesorado (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022). Asimismo, las *relaciones teóricas* que son estudiadas consideran los vínculos entre componentes, génesis y planos verticales del ETM y, también, particularidades de este tipo de ETM en juego.

3. Metodología

En esta investigación se asume un enfoque mixto, de tipo secuencial explicativo (Bergman, 2008), es decir, primero se aborda la problemática desde una perspectiva cuantitativa y, luego, a partir de los resultados obtenidos, se toman decisiones respecto de cómo profundizar en términos cualitativos. Así, bajo este enfoque mixto (Creswell y Creswell, 2023), se analizan las relaciones entre elementos teóricos del ETM. En la etapa cuantitativa, se aplica un cuestionario MWS-SG, diseñado para reconocer variables relevantes desde la perspectiva teórica del ETM. A partir de estos datos se realiza un análisis estadístico entre variables categóricas, mediante el uso de tablas de contingencia, lo que permite identificar implicancias probabilísticas de interés.

En la etapa cualitativa, para profundizar en aspectos de las relaciones teóricas, se adoptó un estudio de caso basado en Yin (2018), seleccionando un *caso único* que se define como representativo y revelador dentro del grupo de profesores informantes, de acuerdo con los resultados obtenidos en la primera etapa. Este caso es *holístico* en la medida que permite ahondar en aspectos específicos de la enseñanza de la geometría en el marco del trabajo matemático idóneo del profesor como unidad de análisis. La justificación de este diseño permite profundizar en relaciones teóricas del ETM idóneo efectivo del profesor. Así, en esta etapa se realiza una entrevista semiestructurada con el propósito de indagar en dichas implicancias probabilísticas, buscando una mayor comprensión desde un caso particular. El flujo del trabajo investigativo se sintetiza en el siguiente esquema (figura 2).

Figura 2. Flujo del trabajo investigativo



Fuente: elaboración propia.

3.1 Muestra y sujetos informantes

La población de este estudio son profesores de matemáticas en servicio de Chile, que al momento de la investigación se encontraran realizando clases en el nivel Primero Medio (14 años aproximadamente). Esto debido a que el estudio se desarrolla en el marco de un proyecto de investigación más amplio, el cual considera la enseñanza en el dominio de geometría de los temas teorema de Thales, homotecia y semejanza de figuras; temas ubicados en dicho nivel escolar.

La muestra para el análisis cuantitativo de los datos se conformó por 63 profesores en ejercicio, que cumplían con las características anteriores y que contestaron de manera libre y voluntaria un cuestionario. Para la implementación del instrumento y el procesamiento de datos se tomaron todas las medidas éticas correspondientes, incluyendo la firma del consentimiento informado por parte de los profesores participantes.

En la etapa cualitativa, se consideró un profesor cuya experiencia en la educación secundaria (15 años), interés por participar en el estudio y claridad para explicar aspectos de su desempeño en la enseñanza resultan relevantes para profundizar en las relaciones identificadas en el análisis cuantitativo. Al profesor se le aplicó una entrevista semiestructurada con el propósito de comprender las relaciones entre las características de su trabajo matemático y el diseño de tareas que son usadas en el aula.

3.2 Instrumentos

Para la toma de datos desde el enfoque cuantitativo se utilizó un cuestionario de respuesta forzada (Bartram, 2007), previamente validado, cuyos ítems fueron diseñados y estructurados de acuerdo a los lineamientos teóricos del ETM idóneo del profesor. Los detalles sobre el proceso y el tipo de validación del instrumento (MWS-SG Questionnaire) son parte de un artículo que se encuentra en etapa de evaluación por pares.

Para la toma de datos desde el enfoque cualitativo, la entrevista fue diseñada por las investigadoras de acuerdo a la literatura sobre el marco teórico del estudio, y con base en las relaciones conceptuales que arrojaron mayor grado de implicación, según los resultados de la etapa cuantitativa. El instrumento se organiza en 4 preguntas abiertas orientadas a profundizar y extender en aspectos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático de los profesores informantes, y sobre el diseño de tareas para la enseñanza. La entrevista fue administrada por una de las investigadoras, previo consentimiento informado en reunión individual con el profesor. En la siguiente tabla 1 se muestran las preguntas planteadas y se explicitan los elementos teóricos del ETM relacionados en cada una (las que son llamadas categorías teóricas iniciales).

Tabla 1. Preguntas planteadas en entrevista semiestructurada

Pregunta	Categorías teóricas iniciales
Con atención en la enseñanza de los temas: semejanza, teorema de Thales y homotecia, responda las siguientes preguntas.	Introducción al planteamiento de las preguntas
¿Qué fundamentos teóricos considera relevantes cuando diseña tareas para la enseñanza? Por ejemplo, en tareas de prueba, de visualización, uso de propiedades.	Fundamentos teóricos en el diseño de tareas
¿Cómo utiliza la tecnología u otras herramientas (tradicionales, como el compás) en el diseño de las tareas? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis instrumental en el diseño de tareas
¿Qué tipo de actividades de validación (o de prueba) considera en su enseñanza en el aula? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis discursiva en la enseñanza
¿Cuáles son las representaciones que privilegia en su enseñanza en el aula? ¿De qué forma las considera? ¿Cómo las implementa en sus clases?	Génesis semiótica en la enseñanza

Fuente: elaboración propia.

Cabe señalar que, tanto en la consulta realizada a través del cuestionario como a través de la entrevista, el diseño de tareas se da a entender como el proceso me-

diante el cual el profesor diseña por sí mismo y de manera auténtica una tarea o actividad de aprendizaje para su clase de geometría.

3.3 Técnicas de análisis

En el análisis cuantitativo, se usan tablas de contingencia para evidenciar relaciones entre variables categóricas binomiales, a través del uso de los estadísticos *odds* y *odds ratio* (Agresti, 2002). Para distribuciones conjuntas con probabilidades de celda π_{ij} , la definición para el *odds* en la fila i es $\Omega_i = \pi_{i1} / \pi_{i2}$, con $i=1,2$, mientras que la definición para los *odds ratio* es $\theta = \Omega_1 / \Omega_2$. Las respuestas del cuestionario (alternativas forzadas) son dicotomizadas en función de aspectos teóricos de interés. Las tablas de contingencia son tablas de doble entrada, donde las dos categorías (excluyentes) de la variable X se organizan en las filas y las dos categorías de la variable Y, que determinan la condición de éxito (y no éxito), se organizan en las columnas. Estas tablas permiten reconocer una distribución de probabilidad para la muestra de informantes, a partir del recuento de frecuencias. Se analizaron comparativamente relaciones mediante el cálculo de los *odds ratio*. Los *odds ratio* son valores no negativos. El valor 1 corresponde a la independencia entre las variables X e Y. Cuando el valor resultante n es mayor a 0 y distinto de 1 (eventualmente mayor que 1), este representa que el *odds* de éxito en la fila 1 es n veces el *odds* de éxito de la fila 2. Esto no significa que la probabilidad $\pi_1 = n \cdot \pi_2$. Cuando una celda tiene probabilidad cero, el valor del *odds ratio* de la tabla inevitablemente será igual a 0 o ∞ . Los valores más alejados de 1,0 en una dirección determinada representan una asociación fuerte y dos valores representan la misma asociación, pero en una dirección opuesta, cuando una es la inversa de la otra.

En el análisis cualitativo, la entrevista se llevó a cabo de forma virtual, a través de una plataforma que permitió su grabación y, posteriormente, fue transcrita para el análisis y codificación. Las categorías teóricas iniciales sirven como punto de partida en esta etapa de los análisis (véase tabla 1). Posteriormente surgen categorías emergentes (inductivas) que reflejan las relaciones teóricas en los ETM a partir del discurso del profesor.

Así, los datos son analizados mediante el análisis de contenido (Leavy, 2014), realizado de forma inductiva y gestionados mediante el software ATLAS.ti (23). La información fue triangulada mediante las (dos) investigadoras del estudio (Utsumi, 2016), quienes revisaron de forma separada las respuestas y asignaron códigos a las categorías emergentes que relacionan elementos teóricos de los ETM, para luego reunirse y comparar la información recopilada. Esto permitió realizar procedimien-

tos de triangulación de investigadores, pues ambas poseen distinta experiencia y formación (Gurdián-Fernández, 2007). Posteriormente, las investigadoras analizaron en conjunto las categorías emergentes y códigos asignados hasta llegar a un consenso que les permitió interpretar la información (Creswell y Creswell, 2023).

4. Resultados

4.1 Análisis cuantitativos

El análisis entre variables categóricas arrojó más de 10 relaciones con valores que podrían ser de interés desde el punto de vista estadístico. No obstante, se han seleccionado 4 de tales relaciones, debido a que su interpretación es relevante desde el punto de vista teórico. Los resultados se expresarán en términos de comparación de *odds* (o proporciones). También, se complementará el análisis con el cálculo del riesgo relativo para la categoría del “no éxito” (categoría B), teniendo en cuenta que la noción de riesgo no necesariamente tiene una connotación negativa. La primera relación de interés que reportamos es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de fundamentos teóricos para el diseño de tareas y la acción de diseñar tareas (véase la tabla 2).

Tabla 2. Tabla de contingencia para las variables asociadas a “diseñar de tareas” y las categorías asociadas a “usar fundamentos teóricos en la enseñanza”

		Categoría A	Categoría B	Total
		Considera fundamentos teóricos en la enseñanza	No considera fundamentos teóricos en la enseñanza	
Variable 1	Diseña tareas	7	5	12
Variable 2	No diseña tareas	35	16	51
Total		42	21	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odd ratio* $\theta = (\pi_{11}/\pi_{12})/(\pi_{21}/\pi_{22}) = 0,64$ indica que la proporción de profesores que considera fundamentos teóricos para abordar temas geométricos en el grupo de profesores que sí diseñan tareas inéditas es 0,64 veces la proporción de personas que considera fundamentos teóricos en el grupo que no diseña tareas. Dicho de otra manera, en la dirección opuesta, la proporción de personas que no considera fundamentos teóricos en el grupo que sí diseña tareas es 1,5625 veces

la proporción de personas que no considera fundamentos en el grupo que no diseña tareas. Además, de acuerdo con la tabla, los profesores que sí diseñan tareas presentan aproximadamente 1,33 veces más riesgo de no considerar fundamentos teóricos en comparación con los profesores que no diseñan tareas. Esto quiere decir que la categoría “Fundamentos teóricos en el diseño de tareas” se presenta de manera más débil en aquellos profesores de matemáticas que prefieren diseñar por sí mismos las tareas que implementan en sus clases. Este resultado informa, por una parte, que son menos los profesores que diseñan sus propias tareas y, por otra, que estos profesores presentan una inclinación levemente más pragmática que aquellos profesores que no diseñan tareas.

La segunda relación de interés que se aborda es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de herramientas tecnológicas para el diseño de tareas y la acción de diseñar tareas (véase la tabla 3).

Tabla 3. Tabla de contingencia para las variables asociadas a “diseñar de tareas” y las categorías asociadas a “utilizar herramientas tecnológicas”

		Categoría A	Categoría B	Total
		Utiliza herramientas tecnológicas	No utiliza herramientas tecnológicas	
Variable 1	Diseña tareas	7	5	12
Variable 2	No diseña tareas	29	22	51
	Total	36	27	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que utiliza herramientas tecnológicas en el grupo que sí diseña tareas es 1,06 veces la proporción de personas que utiliza herramientas teóricas en el grupo que no diseña tareas. Además, los profesores que no diseñan tareas presentan aproximadamente 1,035 veces más riesgo de no utilizar herramientas tecnológicas en comparación con los profesores que sí diseñan tareas. Esto quiere decir que la génesis instrumental se encuentra más fortalecida en aquellos profesores que prefieren diseñar sus propias tareas para implementar sus clases de geometría.

La tercera relación de interés que se aborda es aquella que vincula las categorías que refieren al uso (o no uso) de fundamentos teóricos, de carácter matemático,

para el diseño de tareas y el hecho de considerar actividades de validación (véase la tabla 4).

Tabla 4. Tabla de contingencia para las variables asociadas a “utilizar fundamentos teóricos” y las categorías asociadas a “considerar actividades de validación”

		Categoría A	Categoría B	
		Considera actividades de validación	No considera actividades de validación	Total
Variable 1	Utiliza fundamentos teóricos	41	1	42
Variable 2	No utiliza fundamentos teóricos	20	1	21
	Total	61	2	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que considera actividades de validación en el grupo que sí utiliza fundamentos es 2,05 veces la proporción de personas que considera actividades de validación en el grupo que no utiliza fundamentos teóricos. Además, los profesores que no utilizan fundamentos teóricos presentan aproximadamente 2 veces más riesgo de no considerar actividades de validación en comparación con los profesores que sí utilizan fundamentos teóricos. Esto nos da luces acerca de una mayor presencia de la génesis discursiva en aquellos profesores que sí utilizan actividades de fundamentación teórica en sus clases de geometría, por sobre aquellos que no las utilizan. La estrecha relación entre el uso de fundamentos teóricos y la activación de la génesis discursiva es un resultado esperable, dadas las características de esta génesis y su vínculo con el referencial teórico en la matemática formal.

La cuarta y última relación de interés es aquella que vincula las categorías que refieren a privilegiar (o no privilegiar) el uso de herramientas concretas o visuales y la acción de privilegiar el uso de representaciones (véase la tabla 5).

Tabla 5. Tabla de contingencia para las variables asociadas a “privilegiar las herramientas concretas o visuales” y las categorías asociadas a “privilegiar el uso de figuras junto con otras representaciones”

		Categoría A	Categoría B	
		Privilegia figuras junto con otras representaciones	No privilegia figuras junto con otras representaciones	Total
Variable 1	Privilegia las herramientas concretas y visuales	25	10	35
Variable 2	No privilegia herramientas concretas o visuales	18	10	28
	Total	43	20	63

Fuente: elaboración propia.

El análisis del *odds ratio* indica que la proporción de profesores que privilegia el uso de figuras junto con otras representaciones en el grupo que sí privilegia las herramientas concretas y visuales es 1,388 veces la proporción de profesores que privilegia el uso de figuras junto con otras representaciones en el grupo que no privilegia herramientas concretas o visuales. Además, los profesores que no privilegian las herramientas concretas y visuales presentan aproximadamente 1,25 veces más riesgo de no privilegiar figuras junto con otras representaciones en comparación con los profesores que sí privilegian herramientas concretas o visuales. A partir de lo anterior es posible evidenciar que la génesis semiótica se presenta de manera más fuerte en aquellos profesores que manifiestan mayor preferencia por el uso de herramientas en sus clases de geometría. Esta relación podría dar señales de una correspondencia entre algunos aspectos de la génesis semiótica y algunos aspectos de la génesis instrumental en el quehacer de la enseñanza de la geometría.

4.2 Análisis cualitativo

La tabla 6 muestra una sistematización del análisis de contenido realizado de forma inductiva, en el cual surgen categorías emergentes del relato del profesor entrevistado (lo llamaremos P). Además, se presentan ejemplos de citas narrativas de la entrevista, donde es posible evidenciar las relaciones teóricas con mayor claridad. Los resultados obtenidos fueron organizados a partir de la dimensión global y las categorías teóricas iniciales, previamente establecidas en la etapa cuantitativa. Luego, las categorías emergentes se organizan en función de las categorías deductivas, permitiendo profundizar en las relaciones teóricas definidas previamente.

Del análisis inductivo se obtuvieron 6 categorías emergentes. La tabla 6 muestra dichas categorías, con sus respectivas frecuencias de unidades de significado (US).

Tabla 6. Sistematización del análisis cualitativo

Dimensión global	Categorías teóricas iniciales	Categorías emergentes	Frecuencia de US
Relaciones teóricas en los ETM	Fundamentos teóricos en el diseño de tareas	Organización del referencial teórico en la enseñanza	17
		Tareas en contexto cercano del estudiante	2
	Génesis instrumental en el diseño de tareas	Tecnología para ejemplos ilustrativos	4
		Tareas en el proceso de construcción	2
	Génesis discursiva en la enseñanza	Tareas en el proceso de prueba	7
	Génesis semiótica en la enseñanza	Tareas de aplicación de conceptos	4

Fuente: elaboración propia.

Para exponer cada una de las categorías emergentes, a continuación, se han incluido ejemplos narrativos que dan cuenta de las relaciones teóricas identificadas.

4.2.1 Categoría emergente: organización del referencial teórico en la enseñanza

En esta categoría, se observa que el profesor describe cómo organiza y ejecuta la enseñanza de los temas en el aula, con la finalidad de destacar conceptos, propiedades o teoremas geométricos y la forma en que decide organizarlos al momento de ser enseñados. En la siguiente cita, se puede observar la relación entre las decisiones de estructuración de la enseñanza (de lo simple a lo más complejo) y conceptos como ángulos y figuras semejantes.

P: ...entonces parto con una idea vaga y la voy haciendo un poquito más compleja y a eso le voy sumando elementos como ángulos, trazos y las relaciones que tienen por ejemplo los ángulos de las figuras semejantes...

4.2.2 Categoría emergente: tareas en contexto cercano del estudiante

Esta categoría, cuya frecuencia en el relato del profesor tiene dos apariciones en total, se refiere a la importancia que el profesor atribuye al desarrollo de tareas en el aula en contextos cercanos o reales (en el sentido de la modelación matemática).

Un ejemplo narrativo de esta categoría tiene relación con una tarea para la enseñanza de la homotecia.

P: ...resolver problemas, por ejemplo, de proyecciones, del típico de un proyector, de la ampliación de una foto, ese tipo de situaciones con homotecia.

Durante su relato, también manifiesta el desarrollo de tareas que llama “cercanas a la cotidianidad” y que implican salir de la sala de clases y utilizar su entorno para desarrollar tareas que involucran medir y aplicar los teoremas de Thales y de Pitágoras. Si bien este tipo de tareas no están asociadas con ciertas génesis o componentes de los ETM de forma explícita, se destaca dado el rol y reconocimiento que el profesor atribuye dentro de la enseñanza.

4.2.3 Categoría emergente: tecnología para ejemplos ilustrativos

Al momento de expresar la relación entre las tareas empleadas en el aula con uso de tecnología (artefacto), el profesor describe las características de estas con uso de un software geométrico (GeoGebra) y el rol del programa en la realización de la clase. Tal como señala en el relato, el profesor lo usa principalmente para ilustrar ejemplos específicos y en tareas de comprobación en las que algunos estudiantes emplean el computador del profesor.

P: ...si bien tenemos laboratorio de computación, no hemos diseñado una clase de geometría que abarque los 90 minutos con las distintas actividades donde ellos puedan manipular el GeoGebra o un procesador geométrico, hacemos actividades de exhibición y esporádicamente ellos pasan adelante al computador del profesor que está siendo proyectado y hacen sus creaciones o comprueban algunos ejercicios que resuelven, pero nos limitamos principalmente a eso.

Se debe destacar que este tipo de tareas no están diseñadas para que los estudiantes manipulen el programa, o bien, para aprovechar el potencial dinámico de este. Situaciones de manipulación directa del software por parte de los estudiantes podrían activar la génesis discursiva del ETM u otro tipo de trabajo matemático. Sin embargo, en este caso, el uso de herramientas tecnológicas está orientada principalmente a mostrar o comprobar ejemplos particulares.

4.2.4 Categoría emergente: tareas en el proceso de construcción

En esta categoría se relacionan las tareas en la enseñanza y el proceso de construcción (y la génesis instrumental), la frecuencia en el relato del profesor tiene dos apariciones en total. Si bien no se trata de un tipo de tareas que, aparentemente, sean las más desarrolladas por el profesor, se destaca que considera el uso de ciertos artefactos tradicionales para el estudio de la homotecia, lo cual queda reflejado en su relato.

P: Cuando comenzamos a ver homotecia, las primeras construcciones son en el plano liso, tal vez cuadrículado como para guiar un poquito más la imagen y ahí usamos transportador, regla, compas...

4.2.5 Categoría emergente: tareas en el proceso de prueba

Estas tareas, que se relacionan con el proceso de prueba (y la génesis discursiva), parecen ser relevantes en la enseñanza del profesor, otorgando valoración a este tipo de actividad y alta presencia en la enseñanza de los temas geométricos en juego. Asimismo, se destaca desde el relato del profesor que reconoce implícitamente distintos tipos de prueba, lo cual se observa en el siguiente ejemplo narrativo.

P: Con Thales hacemos lo mismo, pero con menos frecuencia. Si con las líneas paralelas implica que los ángulos sean iguales, como que separamos las figuras en dos triángulos, [y] finalmente demuestran que son semejantes y podemos establecer proporción entre sus lados al demostrar que son semejantes. No sé si será una demostración tan formal, solamente hacemos una correspondencia entre los lados y establecemos proporciones, demostramos por lógica que son semejantes y establecemos proporciones.

Otro ejemplo narrativo que evidencia esta categoría, se relaciona con tareas de demostración en las que están presentes ciertos teoremas desde su referencial teórico.

P: El teorema de Euclides lo demostramos a través de la semejanza, [en] el teorema de Thales también aplicamos semejanza para demostrar.

4.2.6 Categoría emergente: tareas de aplicación de conceptos

Esta categoría destaca por la relación de ciertas tareas en la enseñanza, en las que están presentes diversas representaciones semióticas (explícitas o no) de los objetos geométricos señalados y procesos de tratamiento y conversión en los que se aplican

conceptos ya estudiados (Duval, 1995). Un ejemplo de esta relación se evidencia en el relato sobre una tarea que implica realizar ciertos cálculos entre elementos de figuras semejantes, usando registro numérico o algebraico.

P: ...Podemos, por ejemplo, calcular cuánto vale un trazo a partir de la medida de la otra figura, lo mismo hacemos con las figuras que no están definidas numéricamente, sino que con letras...

4.3 Integración de resultados cuantitativos y cualitativos

Los resultados cuantitativos apuntan a la prevalencia de cuatro relaciones que, en términos teóricos, se pueden interpretar como se indica a continuación:

1. Un posible realce del enfoque teórico en aquellos profesores que optan por no diseñar sus propias tareas en la enseñanza de la geometría respecto de aquellos que prefieren sí diseñar sus propias tareas.
2. Una mayor presencia de la génesis instrumental en aquellos profesores que prefieren diseñar sus propias tareas en la enseñanza de la geometría.
3. Una mayor presencia de la génesis discursiva en aquellos profesores que optan por el uso de fundamentos teóricos en sus prácticas de enseñanza de la geometría.
4. Una mayor presencia de la génesis semiótica en aquellos profesores que manifiestan mayor preferencia por el uso de herramientas en sus clases de geometría.

Al profundizar en estas relaciones, a partir del análisis cualitativo del caso del profesor, es posible advertir lo siguiente:

1. El uso de fundamentos teóricos para el diseño de tareas no está ausente, pero se presenta principalmente con el propósito de organizar los contenidos matemáticos (referencial teórico) y los aspectos contextuales de las tareas propuestas.
2. La presencia de la génesis instrumental en el diseño de tareas propias se manifiesta de dos formas: para mostrar ejemplos con apoyo de software y para explorar construcciones iniciales a partir del uso de herramientas como regla y compás. En el caso del uso de software prima la acción mostrativa del profesor, por lo que la manipulación directa por parte de los estudiantes no es el centro de la tarea.
3. La presencia de la génesis discursiva en el diseño de tareas obedece primariamente a implementar procesos de prueba que permitan demostrar la validez de las propiedades geométricas involucradas en las tareas.
4. La presencia de la génesis semiótica en el diseño de tareas se presenta en situaciones que requieren aplicar conceptos o procedimientos previamente aprendi-

dos, principalmente a través de tratamientos o conversiones entre registros. En este sentido, el uso de herramientas está asociado a la instrumentalización de los conceptos o teoremas que funcionan como artefactos simbólicos en la resolución de las tareas.

5. Discusión y conclusión

En una revisión de la literatura reciente sobre los ETM (Panqueban *et al.*, 2024) se reporta el interés, cada vez más amplio y diverso, en el estudio del ETM idóneo por la comunidad que investiga con sustento en este marco de referencia. Así, este trabajo se plantea como una contribución tanto teórica como metodológica. Desde lo teórico, se aporta al estudio y profundización del constructo ETM idóneo, específicamente, en el *ETM idóneo efectivo del profesorado*, basado en la autoinformación de sus prácticas de enseñanza. En un sentido metodológico, se presenta una forma de acceder al ETM idóneo efectivo del profesorado, en el entendido que para su estudio se pueden utilizar diversas fuentes de recolección de información (observaciones, entrevistas, análisis de documentos, entre otros), lo cual se puede reconsiderar en futuras investigaciones.

A partir del análisis cuantitativo, se destaca que los profesores que sí diseñan tareas son más propensos a no considerar fundamentos teóricos en comparación con los profesores que no las diseñan, con un riesgo relativo de aproximadamente un 33% más. Además, los profesores que sí diseñan tareas presentan menor riesgo de no incluir el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la geometría, en comparación con los profesores que no diseñan tareas, aproximadamente un 3% menos. Si bien esta cifra es menor, el análisis evidencia que existe una activación levemente mayor de la génesis instrumental en aquellos profesores que sí diseñan sus propias tareas.

Por otro lado, los profesores que no utilizan fundamentos teóricos presentan mayor riesgo de no considerar actividades de validación en comparación con los profesores que sí utilizan fundamentos teóricos, con un riesgo relativo de aproximadamente un 100% más. Este resultado se condice con el vínculo teórico que declara el ETM entre la génesis discursiva y el uso de fundamentos matemáticos, en alusión específica al referencial teórico que el profesor evoca para organizar su clase (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023). Asimismo, los profesores que no privilegian el uso de herramientas presentan mayor riesgo de no privilegiar el uso de representaciones en comparación con los profesores que sí privilegian herramientas; específicamente,

un 25% más de riesgo relativo. Este resultado da cuenta de una posible relación entre la génesis semiótica y algunos aspectos de la génesis instrumental en las decisiones que despliega el profesor para la enseñanza de la geometría. A partir de los resultados cuantitativos se definen elementos plausibles de profundizar en la etapa cualitativa.

En cuanto a los análisis en la etapa cualitativa, se resalta la relevancia del profesor en poner atención al diseño de tareas con diversos propósitos para la enseñanza, lo cual queda en evidencia en el análisis de las categorías emergentes presentadas. En este sentido, el profesor analizado deja entrever la relevancia que le atribuye al diseño y la variedad de tareas implementadas en el aula dependiendo del propósito y de los objetivos de aprendizaje trazados.

De la categorización teórica presentada, basada en los resultados empíricos, las dos categorías con mayor frecuencia de unidades de significado son *organización del referencial teórico en la enseñanza* (17 US) y *tareas en el proceso de prueba* (7 US). A modo de ejemplo, la categoría que relaciona tareas y el proceso de prueba (*tareas en el proceso de prueba*) ocupa un lugar importante en la enseñanza de los temas geométricos del profesor, además, distingue y considera implícitamente tipologías de prueba (en alusión a Balacheff, 1987) cuando enseña ciertos teoremas (como Thales y Euclides). Asimismo, en esta categoría, según la perspectiva y experiencia del profesor, las tareas que implican una demostración, si bien son relevantes, son actividades más difíciles de llevar al aula, por lo que el profesor privilegia otro tipo de tareas relacionadas con la prueba y génesis discursiva. Otro aspecto a resaltar en relación con la categoría es la consideración de tareas que implican el tránsito entre el enfoque sintético y analítico en geometría (en alusión a Gascón, 2002), lo cual no siempre se considera en la enseñanza (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgado, 2015).

En cuanto a la categoría *tecnología para ejemplos ilustrativos* de conceptos, una investigación reciente basada en los ETM destaca la relevancia de su estudio en la práctica en el aula del profesorado, además, se trata de una temática abierta, especialmente, desde la perspectiva del ETM idóneo efectivo (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2024). En particular, los ejemplos que muestra el profesor para ilustrar conceptos se presentan con uso de tecnología (los que el profesor llama de "exhibición"), lo cual podría ser considerado para una investigación futura en cuanto al diseño de este tipo de ejemplos para la enseñanza y su implementación en el aula.

Si bien las *tareas en contexto cercano para el estudiante* aparecen con menor frecuencia (2), llama la atención su aparición, pues no hubo preguntas explícitas

en la entrevista que se relacionaran con este aspecto. Sin embargo, el profesor las destacó como un tipo de tarea importante para relacionar el estudio de teoremas (Pitágoras, Thales) con situaciones que señala como “cercanas a la cotidianidad”. En el caso de ahondar en este tipo de tareas dentro de la enseñanza, investigaciones previas han evaluado como pertinente, desde un punto de vista teórico, considerar de forma complementaria a los ETM, el uso de otras perspectivas teóricas como la modelación matemática (Henríquez-Rivas *et al.*, 2021a; Panqueban *et al.*, 2024).

Otro aspecto relevante de los hallazgos tiene relación con las tareas y su aparición desde los análisis como un elemento importante para el profesorado en términos de su enseñanza, tomando en cuenta que las preguntas de la entrevista no aluden a este aspecto ni a cuestiones teóricas de los ETM de manera explícita ni forzada. De aquí que este sea un asunto de relevancia para abordar en futuras investigaciones que ponen atención en el profesor y su ETM idóneo.

En cuanto a las limitaciones del estudio, una de estas se relaciona con los datos provenientes de la etapa cualitativa, pues se trata de un único profesor, por lo cual un desafío sería considerar en futuras investigaciones a más profesores pertenecientes a otros contextos. También, existen limitaciones asociadas con el diseño de caso único, pues se podría obtener resultados distintos con otros profesores. Sin embargo, consideramos que este profesor refleja, en gran medida, aspectos relevantes sobre las relaciones teóricas en el trabajo del profesorado, especialmente y como fue mencionado en el párrafo anterior, debido al énfasis en el diseño de tareas en relación con las génesis y componentes del ETM.

En futuras investigaciones, el diseño metodológico presentado se puede utilizar para propuestas de enseñanza, o bien, ampliar los casos de profesores entrevistados a un diseño de caso múltiple. De este modo, tanto los instrumentos para la toma de datos como los resultados obtenidos pueden ser usados como insumo teórico y metodológico, desde la perspectiva del ETM idóneo potencial o efectivo del profesorado, para realizar diseños, análisis *a priori* o implementaciones en el aula de propuestas de enseñanza.

Agradecimientos: Carolina Henríquez-Rivas agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, Proyecto Fondecyt de Iniciación, Folio 11230523.

6. Referencias bibliográficas

- Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis*. Wiley.
- Ayvaz, Ü., Gündüz, N. y Bozkuş, F. (2017). Understanding of Prospective Mathematics Teachers of the Concept of Diagonal. *Journal on Mathematics Education*, 8(2), 165-184. <http://dx.doi.org/10.22342/jme.8.2.4102.165-184>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00314724>
- Bartram, D. (2007). Increasing validity with forced-choice criterion measurement formats. *International Journal of Selection and Assessment*, 15, 263-272. <https://doi.org/10.1111/j.1468-2389.2007.00386.x>
- Bergman, M. (2008). *Advances in mixed methods research: Theories and applications*. SAGE.
- Creager, M. A. (2022). Geometric refutations of prospective secondary mathematics teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 10(1), 74-99. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1594>
- Cevikbas, M., König, J. y Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: recent developments. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 101-113. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2>
- Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 9-27. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332>
- Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática*, 33(1), 98-124. <https://doi.org/10.24844/em3301.04>
- Creswell, J. W. y Creswell, J. D. (2023). *Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (6th Edn.). SAGE.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
- Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30(54), 1-22. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>
- Gurdián-Fernández, A. (2007). *El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa*. Educativo Regional (IDER).
- Guzmán Retamal, I., Pino-Fan, L. R. y Arredondo, E. H. (2020). Paradojas Didácticas Observadas en la Gestión de los Teoremas de Euclides. *Bolema*, 34(67), 651-677. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a15>

- Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408>
- Henríquez-Rivas, C., Guerrero-Ortiz, C. y Barrera, A. (2021a). Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea. *Educación Matemática*, 33(3), 233-262. <https://doi.org/10.24844/EM3303.09>
- Henríquez-Rivas, C. y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema*, 35(71), 1550-1572. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo-Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021b). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123-142. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210>
- Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idone or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak et al. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6
- Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 35(3), 178-208. <https://doi.org/10.24844/EM3503.06>
- Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2024). Teachers' mathematical work based on examples presented in the teaching of algebra in secondary education. *Front. Educ.* 9, 1346091. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1346091>
- Herbst, P., Cheah, U. H., Richard, P. R. y Keith, J. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs*. Springer.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses [The mathematical workspace and its genesis]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. (2018). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of geometric working spaces. En P. Herbst, U. Cheah, P. Richard y K. Jones (eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs* (pp. 5- 21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_2
- Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces theoretical characteristics. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A. y Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical workspaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(41), 5-15. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 861-874. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Kuzniak, A. y Masselin, B. (2024). Strongly didactic contracts and mathematical work. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 289-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1>
- Leavy, P. (2014). *The Oxford handbook of qualitative research*. Oxford University Press.
- Menares-Espinoza, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En A. Kuzniak et al. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 91-120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5
- Montoya-Delgadillo, E. y Reyes-Avenidaño, C. (2022). The Reference Mathematical Working Space. En A. Kuzniak et al. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 73-90). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4
- Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Erratum to: Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 755. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0793-9>
- Nechache, A. y Gómez-Chacón, I. (2022). Methodological Aspects in the Theory of Mathematical Working Spaces. En A. Kuzniak et al. (eds.), *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 33-56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C. y Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2450. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>
- Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, 29(4), 493-508. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0225-3>
- Ruslin, R., Mashuri, S., Rasak, M. S. A., Alhabsyi, F. y Syam, H. (2022). Semi-structured Interview: A methodological reflection on the development of a qualitative research instrument in educational studies. *IOSR - Journal of Research & Method in Education*, 12(1), 22-29.

- Salazar, J. V. F. (2018). Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. En N. Presmeg, L. Radford, W. M Roth y G. Kadunz (eds.), *Signs of Signification. ICME-13 Monographs* (pp. 217-233). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_12
- Sunzuma, G. y Maharaj, A. (2020). In-service Secondary Teachers' Teaching Approaches and Views Towards Integrating Ethnomathematics Approaches into Geometry Teaching. *Bolema*, 34(66), 22-39. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a02>
- Tachie, S. A. (2020). The Challenges of South African Teachers in Teaching Euclidean Geometry. *International Journal of Learning. Teaching and Educational Research*, 19(8), 297-312. <https://doi.org/10.26803/ijlter.19.8.16>
- Utsumi, S. (2016). Preschool teachers' practices of monitoring children to prevent health risks and facilitate adaptation: Multi-method triangulation in a qualitative study. *International Journal of Psychology*, 51(special 1), 378-390.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). SAGE.
- Zakaryan, D. y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71-97. <https://doi.org/10.24844/em3301.03>



Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.